Mathématiques 1

TSI **2023**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

— On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs complexes.

On admet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

— Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ converge. On admet que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Articulation des parties

Le résultat de la partie I est utilisé dans les parties II et III. Certains résultats de la partie II sont utilisés dans la partie IV. Les parties II et III sont indépendantes.

I Question préliminaire

Q 1. Démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

> Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\lim_{t\to+\infty}\big(u(t)v(t)\big)$ existe, alors les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence,
>
> $$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\, \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\, \mathrm{d}t$$
>
> où $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0)$.

II Transformée de Laplace, généralités

II.A –

Q 2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Q 3. Démontrer que l'application

$$\mathcal{L} : \left| \begin{array}{lcl} E & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & F \end{array} \right.$$

est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f.

II.B – Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

II.B.1) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$.

Q 5. Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

Q 7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

II.B.2) Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt}$.

Q 8. Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

Q 9. En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

II.B.3)

Q 10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.

Q 11. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E.

II.C – Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

Q 12. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f'' \in E$ et que $\lim_{t\to+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q 13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

III Approximation de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment par des fonctions polynomiales

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

> Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\varphi(t) - P_n(t)|\right) = 0$.

III.A – Une famille des fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,...,n\}$. On note $B_n^k : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \end{array}\right.$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial k parmi n.

Q 14. Donner le degré de B_n^k.

Q 15. Pour tout $t \in [0,1]$, calculer $\sum_{k=0}^n B_n^k(t)$.

III.B – Deux résultats généraux

Q 16. Montrer que, si Z est une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(Z) \geqslant 0$. En déduire que, si X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Q 17. *Question de cours.* X étant une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, rappeler la définition de sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et démontrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$.

Q 18. En déduire que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

III.C – Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in [0,1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n,t). On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.

Q 19. Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.

Q 20. En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = \frac{t(1-t)}{n}$.

Q 21. En citant de manière explicite les théorèmes utilisés, montrer qu'il existe $M_\varphi \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \qquad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant M_\varphi |b-a|.$$

Q 22. En utilisant les résultats des questions 18, 21 et 16 puis 20, montrer que

$$|\mathbb{E}(X_n)| \leqslant \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q 23. En citant le théorème utilisé, en déduire que, pour tout nombre réel $t \in [0,1]$,

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t)\right| \leqslant M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

Q 24. Justifier que la fonction

$$w : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t(1-t) \end{array} \right.$$

admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.

Q 25. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $\left(\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

On admet que ce résultat, démontré dans le cas où la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, est encore valable lorsque la fonction φ est seulement continue sur $[0,1]$. Ce dernier résultat sera utilisé dans la partie IV.

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.A – On se propose dans cette sous-partie de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E, c'est-à-dire que

$$\forall (y_1, y_2) \in E^2, \qquad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \implies y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

Q 26. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

Q 27. Montrer que g est une fonction bornée.

Q 28. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leqslant 1, \\ \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \text{si } u = 0. \end{cases}$

Q 29. Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

Q 30. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$ et en citant explicitement le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u.$$

Q 31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q 32. En utilisant le résultat admis à la fin de la partie III, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

Q 33. En déduire que $f = 0$.

Q 34. Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

IV.B – Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{IV.1}$$

IV.B.1) Résolution classique

Q 35. Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1$ de la forme $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Q 36. Résoudre alors le problème (IV.1).

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

Q 37. Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}$.

Q 38. Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \frac{1 + p + p^2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p+1)^2 + 1}.$$

Q 39. En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$ et les résultats de la sous-partie II.B.

Q 40. Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème (IV.1).

IV.C – Le but de cette sous-partie est de déterminer les fonctions x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases} \tag{IV.2}$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

IV.C.1) Résolution classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de sorte que le système (IV.2) s'écrit matriciellement

$$X'(t) = AX(t).$$

Q 41. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Q 42. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Déterminer les fonctions u et v et en déduire les fonctions x et y vérifiant le système (IV.2) et les conditions initiales imposées.

IV.C.2) Résolution en utilisant la transformation de Laplace

On suppose que x et y sont solutions du problème (IV.2), vérifiant en plus les conditions de la sous-partie II.C.

Q 43. Montrer alors que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{-3}{(p+1)(p+4)} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+4)} \end{cases}$$

Q 44. Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+4} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p+4} \end{cases}$$

Q 45. En déduire une expression de x et de y.

Q 46. Établir la réciproque et conclure.

• • • FIN • • •