CORRIGÉ MATHS II - CCS TSI 2023

Q1/. Comme x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que x et x' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Enfin, $t \mapsto x^2(t)$ et $t \mapsto x'(t)^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par produit et E est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme.

Enfin, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$E'(t) = kx'(t)x(t) + x''(t)x'(t) = (kx(t) + x''(t))\, x'(t) = 0,$$

d'après $(I.1)$.

Q2/. On en déduit que E est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Soit M la trajectoire d'une solution x de $(I.1)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, l'abscisse de $M(t)$ est $x = x(t)$ et l'ordonnée de $M(t)$ est $y = x'(t)$. Alors,

$$kx^2 + y^2 = 2E(t) = 2h,$$

car E est constante et $E(0) = h$.

Q3/. Une base de l'espace vectoriel des solutions est

$$\mathcal{B} = (t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \sin(\omega t))\,.$$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit x la solution telle que $(x(0), x'(0)) = (a, b)$. Alors, on dispose de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) \\ \qquad\qquad x(0) = a \\ \qquad\qquad x'(0) = b \end{cases}$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = -\lambda_1 \omega \sin(\omega t) + \lambda_2 \omega \cos(\omega t).$$

Ainsi,

$$x(0) = \lambda_1, \qquad x'(0) = \lambda_2 \omega.$$

Donc,

$$\lambda_1 = a, \qquad \lambda_2 = \frac{b}{\omega}.$$

Donc, la solution correspondant aux conditions initiales $(x(0), x'(0)) = (a, b)$ est

$$x : t \mapsto a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega t).$$

Q4/. On a que
$$\omega^2 x(0)^2 + x'(0)^2 = 2h,$$
c'est-à-dire,
$$\left(\frac{\omega x(0)}{\sqrt{2h}}\right)^2 + \left(\frac{x'(0)}{\sqrt{2h}}\right)^2 = 1.$$
Ainsi, $\left(\frac{\omega x(0)}{\sqrt{2h}}, \frac{x'(0)}{\sqrt{2h}}\right)$ sont les coordonnées d'un point du cercle unité, donc d'après la représentation paramétrique du cercle unité, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que
$$\frac{\omega x(0)}{\sqrt{2h}} = \cos(\theta), \qquad \frac{x'(0)}{\sqrt{2h}} = \sin(\theta).$$
On en déduit les égalités demandées.

Q5/. D'après les deux questions précédentes, on en déduit que, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\theta)\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\sin(\theta)\sin(\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos\left(\omega t - \theta\right), \end{aligned}$$
d'après la formule d'addition.

De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$x'(t) = -\sqrt{2h}\sin\left(\omega t - \theta\right).$$
Donc, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$|x(t)| \leq \frac{\sqrt{2h}}{\omega}, \qquad |x'(t)| \leq \sqrt{2h}.$$
Donc, x et x' sont bornées. Ainsi, les trajectoires sont bornées.

Q6/. Soit x une solution dont l'énergie est nulle. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\omega^2 x(t)^2 + x'(t)^2 = 0,$$
avec $\omega^2 x(t)^2 \geq 0$ et $x'(t) \geq 0$.

On en déduit que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = 0.$$
Donc, la seule solution dont l'énergie est nulle est la solution nulle.

Q7/. Une base de l'espace vectoriel des solutions est
$$\mathcal{B} = \left(t \mapsto e^{\omega t}, t \mapsto e^{-\omega t}\right).$$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit x la solution telle que $(x(0), x'(0)) = (a, b)$. Alors, on dispose de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t} + \lambda_2 e^{-\omega t} \\ x(0) = a \\ x'(0) = b \end{cases}$$
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$x'(t) = \lambda_1 \omega e^{\omega t} - \lambda_2 \omega e^{-\omega t}.$$
Ainsi,
$$x(0) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad x'(0) = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\omega.$$

Donc,

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2\omega}, \qquad \lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2\omega}.$$

Donc, la solution correspondant aux conditions initiales $(x(0), x'(0)) = (a, b)$ est

$$x : t \mapsto \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2\omega}\right) e^{\omega t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2\omega}\right) e^{-\omega t} = \frac{a}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) + \frac{b}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right).$$

Q8/. Soit x une solution dont l'énergie est nulle. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t)^2 = \omega^2 x(t)^2.$$

Puisque x est une solution, on dispose de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t} + \lambda_2 e^{-\omega t}.$$

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t)^2 = \lambda_1^2 e^{2\omega t} + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 e^{-2\omega t},$$

et

$$x'(t)^2 = \omega^2\left(\lambda_1^2 e^{2\omega t} - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 e^{-2\omega t}\right).$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1^2 e^{2\omega t} - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 e^{-2\omega t} = \lambda_1^2 e^{2\omega t} + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 e^{-2\omega t},$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$4\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

donc $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$.

Donc, on dispose de $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t},$$

ou on dispose de $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_2 e^{-\omega t}.$$

Réciproquement, supposons que : on dispose de $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t},$$

ou on dispose de $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_2 e^{-\omega t}.$$

Sans perte de généralité, plaçons-nous dans le cas où $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t}$ (le deuxième cas se traite de la même manière). Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = \lambda_1 \omega e^{\omega t}.$$

Et donc, on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t)^2 = \omega^2 x(t)^2.$$

Ainsi, les solutions d'énergie nulle sont les solutions colinéaires à $t \mapsto e^{\omega t}$ et les solutions colinéaires à $t \mapsto e^{-\omega t}$. Leur trajectoire est la droite passant par l'origine et de pente ω dans le premier cas, et la droite passant par l'origine et de pente $-\omega$ dans le deuxième cas.

Q9/. Soit x une solution de trajectoire bornée. Alors, on dispose de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \lambda_1 e^{\omega t} + \lambda_2 e^{-\omega t}.$$
Supposons par l'absurde que $\lambda_1 > 0$. Alors,
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty,$$
par somme de limites. Contradiction. Même chose en supposant que $\lambda_1 < 0$.

Donc, $\lambda_1 = 0$.

De même, supposons par l'absurde que $\lambda_2 < 0$. Alors,
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = +\infty,$$
par somme de limites. Contradiction. Même chose en supposant que $\lambda_2 < 0$.

Donc, $\lambda_2 = 0$.

Donc, x est la solution idnetiquement nulle.

Réciproquement, la solution identiquement nulle a une trajectoire bornée.

Q10/. On calcule
$$AX(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\omega^2 x(t) - 2\alpha x'(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}.$$
Ainsi, x vérifie $(II.1) \iff x'' = -\omega^2 x - 2\alpha x' \iff \forall t \in \mathbb{R}\ X'(t) = AX(t)$.

Q11/. Le polynôme caractéristique de A est
$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ \omega^2 & X + 2\alpha \end{vmatrix} = X(X + 2\alpha) + \omega^2 = X^2 + 2\alpha X + \omega^2.$$
Le discriminant de ce trinôme est
$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\omega^2 = 4(\alpha^2 - \omega^2) > 0,$$
car $\alpha > \omega > 0$. Donc, ce trinôme admet deux racines réelles distinctes. Donc, A admet deux valeurs propres distinctes :
$$\alpha_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}, \qquad \alpha_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$
Étant carrée de taille 2, on en déduit que A est diagonalisable.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre α_1. Alors, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ implique
$$y = \alpha_1 x.$$
Donc, un vecteur propre associé à la valeur propre α_1 est
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$
De même, un vecteur propre de A associé à la valeur propre α_2 est
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Donc, une base de vecteurs propres est

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right).$$

Q12/. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

la matrice de changement de base, elle est inversible.

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors, X est une solution du système différentiel $X' = AX \iff$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X)(t),$$

où

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X)(t) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1 x_1(t) \\ x_2(t) = \alpha_2 x_2(t) \end{cases} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = \mu_1 e^{\alpha_1 t} \\ x_2(t) = \mu_2 e^{\alpha_2 t} \end{cases},\quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \left(P^{-1}X\right)(t) = \mu_1 \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \\
&\iff P^{-1}X \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \right) \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto P \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'espace vectoriel des solutions du système différentiel $X' = AX$ a pour famille génératrice

$$\mathcal{B} = \left(t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto P \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \right).$$

Or, $\left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre donc $\mathcal{B}$ aussi, donc c'est une base de cet espace vectoriel. On en déduit que sa dimension est 2.

Comme $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ (car $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$), on en déduit que $t \mapsto e^{\alpha_1 t}$ et $t \mapsto e^{\alpha_2 t}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Soit x une solution de $(II.1)$ et X une solution du système différentiel $X' = AX$ associé.

Alors, on dispose de $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X(t) &= \mu_1 P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 P \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \mu_1 e^{\alpha_1 t} \\ \mu_2 e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 e^{\alpha_1 t} + \mu_2 e^{\alpha_2 t} \\ \mu_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \mu_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, par combinaison linéaire, on en déduit que x est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Une solution de l'équation différentielle $(II.1)$ n'est pas forcément bornée sur $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\alpha_1 t} = +\infty.$$

Q13/. On a $X_0 \in \mathrm{Vect}(X_0)$ et comme X_0 est un vecteur propre de A, $\mathrm{Vect}(X_0)$ est stable par A. Donc, d'après la propriété admise, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathrm{Vect}(X_0)$.

On en déduit l'énoncé.

Q14/. Sachant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = a(t)X_0$ et que a est de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

est équivalent au problème de Cauchy

$$\begin{cases} a'(t) = \lambda a(t) \\ a(0) = 1 \end{cases}$$

qui a pour unique solution

$$a : t \mapsto e^{\lambda t}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = e^{\lambda t} X_0.$$

Q15/. Supposons que A a une valeur propre réelle $\lambda \neq 0$. Alors, on prend X_0 un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. Alors, $X : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution du problème de Cauchy de donnée initiale X_0. Comme $X_0 \neq 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda t} = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{t \to -\infty} e^{\lambda t} = +\infty$$

selon le signe de λ, on en déduit que X n'est pas bornée.

On en déduit l'énoncé.

Q16/. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\lambda_1 X_0 + \lambda_2 A X_0 = 0,$$

alors

$$\lambda_1 A X_0 + \lambda A^2 X_0 = 0,$$

donc

$$\lambda_1 A X_0 = 0,$$

car $X_0 \in \mathrm{Ker}(A^2)$. Donc,

$$\lambda_1 = 0,$$

car $AX_0 \neq 0$. Donc,

$$\lambda_2 AX_0 = 0,$$

d'après la première ligne. Donc,

$$\lambda_2 = 0,$$

car $AX_0 \neq 0$.

Donc, (X_0, AX_0) est libre.

Q17/. Ainsi, $\mathcal{B}_P = (X_0, AX_0)$ est une base de $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$.

Comme a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X'(t) = a'(t)X_0 + b'(t)AX_0,$$

et

$$AX(t) = a(t)AX_0$$

Ainsi, en utilisant la base $\mathcal{B}_P$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} a'(t) = 0 \\ b'(t) = a(t) \\ a(0) = 1,\ b(0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si X est solution du problème de Cauchy, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = 1,\ b(t) = t.$$

Ainsi, la trajectoire de X est une droite passant par X_0 et dirigée par AX_0. Elle n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Q18/. Le disriminant de l'équation du second degré en question est

$$\Delta = 4\mu^2 \cos^2 \varphi - 4\mu^2 = 4\mu^2 \left(\cos^2(\varphi) - 1\right) < 0,$$

car $\cos(\varphi)$ est différent de 1 et de -1.

Donc, cette équation n'a pas de racine réelle.

Q19/. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que X_0 et AX_0 sont colinéaires. Comme $X_0 \neq 0$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$AX_0 = \lambda X_0.$$

Alors, en multipliant par A, on trouve

$$A^2 X_0 = \lambda AX_0,$$

donc

$$2\mu \cos(\varphi) AX_0 - \mu^2 X_0 = \lambda AX_0,$$

donc

$$(\lambda - 2\mu\cos(\varphi))\, AX_0 = -\mu^2 X_0.$$

Or, $\mu^2 \neq 0$ et $X_0 \neq 0$, donc $\mu^2 X_0 \neq 0$, donc $(\lambda - 2\mu\cos(\varphi))\, AX_0 \neq 0$, donc $\lambda - 2\mu\cos(\varphi) \neq 0$. Donc,

$$AX_0 = -\frac{\mu^2}{\lambda - 2\mu\cos(\varphi)} X_0.$$

On en déduit que

$$\lambda = -\frac{\mu^2}{\lambda - 2\mu\cos(\varphi)},$$

donc

$$\lambda^2 - 2\mu\cos(\varphi)\lambda + \mu^2 = 0.$$

Or, $\lambda \in \mathbb{R}$. La dernière égalité est donc en contradiction avec la question précédente.

Donc, (X_0, AX_0) est libre.

Q20/. Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0,$$

donc

$$X'(t) = a'(t)X_0 + b'(t)AX_0,$$

et

$$\begin{aligned} AX(t) &= a(t)AX_0 + 2\mu\cos(\varphi)b(t)AX_0 - \mu^2 b(t)X_0 \\ &= -\mu^2 b(t)X_0 + \left(a(t) + 2\mu\cos(\varphi)b(t)\right)AX_0 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que (X_0, AX_0) est une base de $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$, on trouve que $X'(t) = AX(t)$ est équivalente à

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{c} a'(t) = -\mu^2 b(t) \\ b'(t) = a(t) + 2\mu\cos(\varphi)b(t) \end{array} \right.$$

En utilisant la première égalité et le fait que b est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que a' est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, a est de classe $\mathcal{C}^2$. En utilisant la deuxième égalité et le fait que a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que b' est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, b est de classe $\mathcal{C}^2$.

On voit aussi que $X(0) = X_0$ est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = 1 \\ b(0) = 0 \end{array} \right.$$

Comme $\mu \neq 0$, on en déduit que

$$b(0) = -\frac{a'(0)}{\mu^2} = 0.$$

Enfin, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a''(t) &= -\mu^2 b'(t) \\ &= -\mu^2 a(t) - 2\mu^3\cos(\varphi)b(t) \\ &= -\mu^2 a(t) + 2\mu\cos(\varphi)a'(t) \end{aligned}$$

en utilisant $(*)$. Ce qui implique la dernière égalité de l'énoncé.

Q21/. a est solution d'une équation différentielle linéaire homogène de second ordre aux coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$(**) \qquad x^2 - 2\mu\cos(\varphi)x + \mu^2 = 0.$$

Il s'agit de l'équation considérée à la question 18, dont le discriminant est

$$\Delta = 4\mu^2\left(\cos^2(\varphi) - 1\right) < 0,$$

dont les racines carrées sont

$$2\mu\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}i = 2\mu|\sin(\varphi)|i \qquad \text{et} \qquad -2\mu|\sin(\varphi)|i$$

car $\mu > 0$. Dans tous les cas,

$$\delta = 2\mu\sin(\varphi)i$$

est l'une des deux racines carrées de Δ. Ainsi, les racines de $(**)$ sont :

$$x_1 = \mu\left(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)\right), \qquad x_2 = \mu\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right).$$

Ainsi, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(t) &= \lambda_1 e^{\mu\cos(\varphi)t}\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right) + \lambda_2 e^{\mu\cos(\varphi)t}\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \\ &= \left(\lambda_1\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right) + \lambda_2\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right)\right)e^{\mu\cos(\varphi)t} \end{aligned}$$

Comme $a(0) = 1$, on trouve que $\lambda_1 = 1$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a'(t) &= \mu\sin(\varphi)\left(-\lambda_1\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) + \lambda_2\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right)\right)e^{\mu\cos(\varphi)t} \\ &\quad + \mu\cos(\varphi)\left(\lambda_1\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right) + \lambda_2\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right)\right)e^{\mu\cos(\varphi)t} \\ &= \mu\left(\left(\lambda_1\cos(\varphi) + \lambda_2\sin(\varphi)\right)\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right) + \left(\lambda_2\cos(\varphi) - \lambda_1\sin(\varphi)\right)\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right)\right)e^{\mu\cos(\varphi)t}. \end{aligned}$$

Comme $a'(0) = 0$, on trouve que $\mu\left(\lambda_1\cos(\varphi) + \lambda_2\sin(\varphi)\right) = 0$, donc

$$\lambda_2 = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)},$$

car $\mu \neq 0$.

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\cos\left(\mu\sin(\varphi)t\right) - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right)\right)e^{\mu\cos(\varphi)t} \\ &= \frac{\sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right)}{\sin(\varphi)}e^{\mu\cos(\varphi)t}. \end{aligned}$$

Q22/. On pose $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $AX_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 a(t) + y_1 b(t) \\ x_2 a(t) + y_2 b(t) \\ . \\ . \\ x_n a(t) + y_n b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\varphi)}e^{\mu\cos(\varphi)t}\begin{pmatrix} x_1\sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_1\frac{1}{\mu}\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \\ x_2\sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_2\frac{1}{\mu}\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \\ . \\ . \\ x_n\sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_n\frac{1}{\mu}\sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\varphi)}e^{\mu\cos(\varphi)t}Y(t),$$

en notant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1 \sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_1 \frac{1}{\mu} \sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \\ x_2 \sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_2 \frac{1}{\mu} \sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \\ . \\ . \\ x_n \sin\left(\varphi - \mu\sin(\varphi)t\right) + y_n \frac{1}{\mu} \sin\left(\mu\sin(\varphi)t\right) \end{pmatrix}.$$

Chaque coordonnée de $Y(t)$ est de la forme $K_j \cos\left(\mu\sin(\varphi)t + \psi_j\right)$ où $K_j > 0$ et $\psi_j \in \mathbb{R}$. Ainsi, on dispose de $t_n \to +\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_1 \cos\left(\mu\sin(\varphi)t_n + \psi_1\right) = K_1$, et on dispose de $s_n \to -\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_1 \cos\left(\mu\sin(\varphi)s_n + \psi_1\right) = K_1$. On prend $t_n = C + \frac{2\pi}{\mu\sin(\varphi)} n$ et $s_n = C - \frac{2\pi}{\mu\sin(\varphi)} n$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante adaptée.

Ainsi,

Supposons que $\cos(\varphi) \neq 0$. On considère le cas où $\mu\cos\varphi > 0$ (le cas $\mu\cos\varphi < 0$ se traite de façon analogue). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, la première coordonnée de $X(t_n)$ est

$$\frac{K_1}{\sin(\varphi)} e^{\mu\cos(\varphi)t_n}$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. On en déduit que X n'est pas borné.

Supposons que $\cos(\varphi) = 0$, alors a est bornée par $\frac{1}{\sin\varphi}$ et b est bornée par $\frac{1}{\mu\sin(\varphi)}$. D'après l'inégalité tringulaire, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &\leq |a(t)| \|X_0\| + |b(t)| \|AX_0\| \\ &\leq \frac{1}{\sin\varphi} \|X_0\| + \frac{1}{\mu\sin\varphi} \|AX_0\| \end{aligned}$$

Donc, X est bornée.

Ce qui démontre l'équivalence souhaitée.

Q23/. Comme $\cos\varphi = 0$, on a $\sin(\varphi) = 1$ ou $\sin(\varphi) = -1$.

Dans le premier cas, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$b(t) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu t).$$

Même résultat dans le deuxième cas par simplification.

Q24/. Avec un raisonnement similaire, on trouve que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a(t) = \cos(\mu t)$$

Donc, pour $t \in \mathbb{R}$, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \|X(t)\|^2 &= \langle X(t), X(t) \rangle \\ &= \langle a(t)X_0 + b(t)AX_0, a(t)X_0 + b(t)AX_0 \rangle \\ &= a(t)^2 \|X_0\|^2 + 2a(t)b(t) \langle X_0, AX_0 \rangle + b(t)^2 \|AX_0\|^2 \\ &= \cos^2(\mu t) \|X_0\|^2 + \frac{2\cos(\mu t)\sin(\mu t)}{\mu} \langle X_0, AX_0 \rangle + \frac{\sin^2(\mu t)}{\mu^2} \|AX_0\|^2 \\ &= \cos^2(\mu t) \|X_0\|^2 + \frac{\sin(2\mu t)}{\mu} \langle X_0, AX_0 \rangle + \frac{\sin^2(\mu t)}{\mu^2} \|AX_0\|^2. \end{aligned}$$

Q25/. $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est dérivable par combinaison linéaire. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 &= 2\cos(2\mu t)\left\langle X_0, AX_0\right\rangle - 2\mu\sin(\mu t)\cos(\mu t)\|X_0\|^2 + \frac{2}{\mu}\sin(\mu t)\cos(\mu t)\|AX_0\|^2 \\ &= 2\cos(2\mu t)\left\langle X_0, AX_0\right\rangle + \frac{1}{\mu}\sin(2\mu t)\left(\|AX_0\|^2 - \mu^2\|X_0\|^2\right).\end{aligned}$$

Q26/. X est contenue dans un cercle de centre l'origine $\iff$ $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est constante $\iff$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 = 0$.

Or, $t \mapsto \frac{d}{dt}\|X(t)\|^2$ est de la forme $C\cos(2\mu t + \psi)$ où $C \geq 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Plus précisément,

$$C^2 = 4\left\langle X_0, AX_0\right\rangle^2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\|AX_0\|^2 - \mu^2\|X_0\|^2\right)^2.$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 = 0 \iff C = 0$
$\iff \left\langle X_0, AX_0\right\rangle = 0$ et $\|AX_0\|^2 - \mu^2\|X_0\|^2 = 0$
$\iff \left\langle X_0, AX_0\right\rangle = 0$ et $\|AX_0\| = \mu\|X_0\|$
car les normes sont positives et μ aussi.
Cela démontre l'équivalence demandée.

Q27/. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\begin{aligned}\left(X^T AY\right)^T &= Y^T A^T (X^T)^T \\ &= Y^T A^T X.\end{aligned}$$

Or, $X^T AY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. Donc,

$$\left(X^T AY\right)^T = X^T AY,$$

ce qui implique le résultat demandé.

Q28/. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $X \in \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}X^T AX &= X^T A^T X \\ &= -X^T AX,\end{aligned}$$

car A est antisymétrique. Donc,

$$2X^T AX = 0,$$

donc

$$X^T AX = 0.$$

Q29/. Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$(X+Y)^T A(X+Y) = 0$$

d'après l'hypothèse. De même,

$$\begin{aligned}(X+Y)^T A(X+Y) &= \left(X^T + Y^T\right) A\left(X+Y\right) \\ &= \left(X^T + Y^T\right)\left(AX + AY\right) \\ &= X^T AX + X^T AY + Y^T AX + Y^T AY \\ &= X^T AY + Y^T AX,\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse. On en déduit que

$$X^T AY = -Y^T AX.$$

Or, d'après la question 27,

$$X^T AY = Y^T A^T X.$$

Donc,

$$Y^T A^T X = -Y^T AX.$$

Autrement dit, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\langle Y, AX + A^T X \right\rangle = 0.$$

Donc,

$$AX + A^T X \in (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\},$$

car l'orthogonl de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ a une dimension égale à $n - n = 0$. Donc,

$$AX + A^T X = 0,$$

et

$$AX = -A^T X.$$

Q30/. D'après la question précénte, les endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^n$ suivants sont identiques :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & A^T X \end{array} \right. \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & -AX \end{array} \right.$$

La matrice canoniquement associée à φ est A^T et la matrice canoniquement associée à ψ est $-A$. Or, l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui à une matrice associe l'endomorphisme qui lui est canoniquement associée est un isomorphisme, donc

$$A^T = -A.$$

Donc, A est antisymétrique.

Q31/. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|X(t)\|^2 = \langle X(t), X(t) \rangle .$$

Ainsi, $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit scalaire d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec elle-même.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 &= 2 \left\langle \frac{d}{dt}X(t), X(t) \right\rangle \\ &= 2 \langle AX(t), X(t) \rangle \\ &= 2X(t)^T AX(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car A est antisymétrique et d'après la question 28.

Donc, $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante. Donc, la trajectoire de X est sphérique.

Q32/. Quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire de la solution du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & AX(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{array}\right.$$

est supposée sphérique. Donc, pour $X_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe $Z \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|X(t) - Z\| \leq r.$$

Donc, pour $t \in \mathbb{R}$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|X(t)\| \leq \|X(t) - Z\| + \|Z\| \leq r + \|Z\|.$$

On en déduit que quelque soit la condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire de la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ est bornée. Donc, d'après la question 15, la seule valeur propre réelle possible pour la matrice A est 0.

Q33/. Comme le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

avec $\lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$. λ et μ sont les valeurs propres de A. Donc, d'après la question 32, $\lambda = \mu = 0$. Donc, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le carré de la dernière matrice est nul et il est semblable à A^2. Or, il n'y a que la matrice nulle qui est semblable à la matrice nulle. Donc,

$$A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, si $X \in \mathrm{Ker}A$, alors $AX = 0$, donc $AAX = A^2X = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}A^2$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2.$$

Supposons par l'absurde que $\mathrm{Ker}A \neq \mathrm{Ker}A^2$. Dans ce cas, on dispose de $X_0 \in \mathrm{Ker}A^2$ tel que $X_0 \notin \mathrm{Ker}A$. D'après la question 17, on trouve que la trajectoire de X, solution du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{c} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{array}\right.$$

n'est pas bornée. Ce qui contredit le fait que la trajectoire de X est sphérique. Donc,

$$\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}A^2.$$

Or, $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, donc $\mathrm{Ker}A^2 = \mathbb{R}^2$. Alors que $\mathrm{Ker}A \neq \mathbb{R}^2$ car $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. On aboutit donc à une contradiction.

Q34/. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}$. De plus, il est unitaire. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta).$$

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on trouve que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Donc, si $\alpha \notin \mathbb{R}$, alors $\beta = \overline{\alpha}$. Ainsi, soit α et β sont réelles, soit α et β sont des complexes conjugués non réels.

Dans le premier cas, d'après la question 32, $\alpha = \beta = 0$, donc χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui aboutit à une contradiction d'après la question 33.

Donc, on a le deuxième cas, et $\alpha = \overline{\beta} \notin \mathbb{R}$. Donc, A possède deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En raisonnant comme dans la question 32, vu qu'on suppose que les trajectoires du système différentiel $X' = AX$ sont sphériques, quelle que soit la condition initiale ; on en déduit que les trajectoires du système différentiel $X' = AX$ sont bornées, quelle que soit la condition initiale. Donc, d'après la proposition 1, les valeurs propres A dans $\mathbb{C}$ ont une partie réelle égale à 0.

On en déduit donc qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $\alpha = i\mu$ et $\beta = -i\mu$. Donc, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix}.$$

Donc, A^2 est semblable à

$$\begin{pmatrix} -\mu^2 & 0 \\ 0 & -\mu^2 \end{pmatrix} = -\mu^2 I_2.$$

Donc, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A^2 = P^{-1}\left(-\mu^2 I_2\right)P = -\mu^2 P^{-1} I_2 P = -\mu^2 P^{-1} P = -\mu^2 I_2.$$

Ainsi,

$$A^2 = -\mu^2 I_2.$$

Q35/. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La trajectoire de X, solution de $X' = AX$ et $X(0) = X_0$ est supposée sphérique.

Comme $A^2 = -\mu^2 I_2$, on trouve que $X_0 \in \operatorname{Ker}\left(A^2 + \mu^2 I_2\right)$. Donc, d'après la Proposition 2, a trajectoire de X est tracée dans un cercle du plan $\operatorname{Vect}(X_0, AX_0)$, et

$$\langle X_0, AX_0 \rangle = 0.$$

Q36/. On raisonne par double-implication.

On suppose que la matrice A est antisymétrique. Alors, d'après la question 31, les trajectoires du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont sphériques.

On suppose que les trajectoires du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont sphériques. Alors, d'après la question 35,

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \qquad \langle X, AX \rangle = 0,$$

ce qui revient à

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \qquad X^T AX = 0.$$

D'après la question 30, on en déduit que A est antisymétrique.

Q37/. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, le produit vectoriel $\omega \wedge x \in \mathbb{R}^3$, donc l'application f_ω est bien définie.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f_\omega(x + \lambda y) &= \omega \wedge (x + \lambda y) \\ &= \omega \wedge x + \lambda \omega \wedge y \\ &= f_\omega(x) + \lambda f_\omega(y), \end{aligned}$$

d'après la bilinéarité du produit vectoriel.

Donc, $f_\omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Il s'agit donc d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$f_\omega(e_1) = \omega \wedge e_1 = (0, \omega_3, -\omega_2), \qquad f_\omega(e_2) = (-\omega_3, 0, \omega_1), \qquad f_\omega(e_3) = (\omega_2, -\omega_1, 0).$$

On en déduit que la matrice de f_ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière est antisymétrique.

Donc, f_ω est un endomorphisme antisymétrique.

Q38/. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

Commençons par le cas où y et z sont colinéaires. Alors, $y \wedge z = 0$. Donc,

$$x \wedge (y \wedge z) = 0$$

et on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda z$ ou que $z = \lambda y$. Plaçons nous dans le cas où $y = \lambda z$ (sachant que l'autre cas se traite de la même manière), alors,

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z &= \langle x, z \rangle \lambda z - \langle x, \lambda z \rangle z \\ &= \lambda \left(\langle x, z \rangle z - \langle x, z \rangle z \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit scalaire. Cela démontre l'égalité de l'énoncé.

Maintenent, considérons le cas où y et z ne sont pas colinéaires, autrement dit la famille (y, z) est libre. Alors, (y, z) est une base de $\mathrm{Vect}(y, z)$, donc $\mathrm{Vect}(y, z)$ est un plan vectoriel, sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On applique alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (y, z) de $\mathrm{Vect}(y, z)$ pour obtenir une base orthonormée (e_2, e_3) de $\mathrm{Vect}(y, z)$ telle que $e_2 \in \mathrm{Vect}(y)$. On dispose donc de $y_2, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ tels que $y = y_2 e_2$ et $z = z_2 e_2 + z_3 e_3$. On pose $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et comme (e_2, e_3) est une famille orthonormée, on en déduit que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On dispose alors de $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Donc, en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel ainsi que son action sur une base orthonormée directe,

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= x \wedge ((y_2 e_2) \wedge (z_2 e_2 + z_3 e_3)) \\ &= x \wedge (y_2 z_3 e_2 \wedge e_3) \\ &= y_2 z_3 x \wedge e_1 \\ &= x_2 y_2 z_3 e_2 \wedge e_1 + x_3 y_2 z_3 e_3 \wedge e_1 \\ &= -x_2 y_2 z_3 e_3 + x_3 y_2 z_3 e_2 \end{aligned}$$

et en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire ainsi que son action sur une base orthonormée,

$$\begin{aligned}\langle x, z\rangle\, y - \langle x, y\rangle\, z &= \langle x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, z_2e_2 + z_3e_3\rangle\, y - \langle x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_2e_2\rangle\, z \\ &= (x_2z_2 + x_3z_3)\, y - x_2y_2z \\ &= (x_2z_2 + x_3z_3)\, y_2e_2 - x_2y_2z_2e_2 - x_2y_2z_3e_3 \\ &= x_3y_2z_3e_2 - x_2y_2z_3e_3\end{aligned}$$

Cela démontre l'égalité de l'énoncé.

Q39/. Comme X est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $t \mapsto \langle X(t), \omega\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant la bilinéarité du produit vectoriel, le fait que $\omega \wedge X(t)$ est orthogonal à ω, et le fait que v est orthogonal à ω,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\langle X(t), \omega\rangle\right) &= \left\langle \frac{d}{dt}X(t), \omega\right\rangle \\ &= \langle \omega \wedge X(t) + \langle X(t), \omega\rangle\, v, \omega\rangle \\ &= \langle \omega \wedge X(t), \omega\rangle + \langle X(t), \omega\rangle \langle v, \omega\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $t \mapsto \langle X(t), \omega\rangle$ est constante. Donc, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle X(t), \omega\rangle = K$.

Q40/. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\|X(t) - a\|^2 &= \langle X(t) - a, X(t) - a\rangle \\ &= \|X(t)\|^2 - 2\langle X(t), a\rangle + \|a\|^2 \\ &= \|X(t)\|^2 - 2\langle X(t), \alpha(\omega + \omega \wedge v)\rangle + \|a\|^2 \\ &= \|X(t)\|^2 - 2\alpha\langle X(t), \omega \wedge v\rangle - 2\alpha\langle X(t), \omega\rangle + \|a\|^2 \\ &= \|X(t)\|^2 - 2\alpha\langle X(t), \omega \wedge v\rangle - 2\alpha K + \|a\|^2 \\ &= \|X(t)\|^2 - 2\alpha\langle X(t), \omega \wedge v\rangle + C\end{aligned}$$

avec

$$C = -2\alpha K + \|a\|^2.$$

Q41/. $t \mapsto \|X(t) - a\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est le produit scalaire d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec elle-même.

Soit $t \in \mathbb{R}$ En utilisant le fait que la dérivée d'une constante est nulle, la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\omega \wedge X(t)$ est orthogonal à $X(t)$ et que v est orthogonal à $\omega \wedge v$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|X(t) - a\|^2\right) &= \frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 - 2\alpha\frac{d}{dt}\langle X(t), \omega \wedge v\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{d}{dt}X(t), X(t)\right\rangle - 2\alpha\left\langle \frac{d}{dt}X(t), \omega \wedge v\right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{d}{dt}X(t), X(t) - \alpha(\omega \wedge v)\right\rangle \\ &= 2\langle \omega \wedge X(t) + \langle X(t), \omega\rangle\, v, X(t) - \alpha(\omega \wedge v)\rangle \\ &= -2\alpha\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v\rangle + 2\langle X(t), \omega\rangle \langle v, X(t)\rangle,\end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité demandée par l'énoncé.

Q42/. En échangeant les colonnes du déterminant puis en utilisant la question 38 puis en utilisant que v est orthogonal à ω,

$$\begin{aligned}\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v\rangle &= \det(\omega, X(t), \omega \wedge v)\\ &= -\det(\omega, \omega \wedge v, X(t))\\ &= -\langle \omega \wedge (\omega \wedge v), X(t)\rangle\\ &= -\langle \langle \omega, v\rangle \omega - \langle \omega, \omega\rangle v, X(t)\rangle\\ &= \|\omega\|^2 \langle X(t), v\rangle .\end{aligned}$$

Q43/. En utilisant les deux questions précédentes ainsi que la question 39, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|X(t) - a\|^2\right) &= 2\langle X(t), \omega\rangle \langle v, X(t)\rangle - 2\alpha \langle X(t), v\rangle \|\omega\|^2\\ &= (2K - 2K)\langle v, X(t)\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc, $t \mapsto \|X(t) - a\|^2$ est constante. Ainsi, la trajectoire de X est sphérique.