Q1. On a $G_0' = 0$, donc $\boxed{G_1 = X(1+(1+X)\times 0) = X.}$

De plus, $G_1' = 1$, donc $\boxed{G_2 = X(X+(1+X)\times 1) = X(1+2X) = X+2X^2.}$

Q2. On a $\boxed{R_0 = 1}$ et $\boxed{D_0 : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}.}$

Q3. On sait que multiplier ou diviser le terme général d'une série entière de la forme $\sum a_k x^k$ par k ne change pas son rayon de convergence. Or, $k^{n+1} = k\times k^n$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_{n+1} = R_n$: $\boxed{\text{la suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$

Comme $R_0 = 1$, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ R_n = 1.}$

Q4. Soit $x\in]-1,1[$, par linéarité de la somme d'une série (convergente) :

$$D_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n+1}x^k = x\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n+1}x^{k-1}.$$

On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, à l'intérieur du domaine de convergence : pour tout $x\in]-1,1[$,

$$D_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^n x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k^n x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n\times kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n+1}x^{k-1}.$$

On a donc bien : $\boxed{\text{pour tout } x\in]-R_n,R_n[,\ D_{n+1}(x) = xD_n'(x).}$

Q5. Remarquons d'abord que pour tout $x\neq 1$, $1+\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$. Notamment, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

On montre le résultat demandé par récurrence simple.

Pour $n=0$, on a pour tout $x\in]-1,1[$: $D_0(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}G_0\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, vu que $G_0\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = 1$.

Soit $n\geq 0$, supposons que pour tout $x\in]-1,1[$, $D_n(x) = \dfrac{1}{1-x}G_n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Alors, d'après la question précédente, pour $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
D_{n+1}(x) &= xD_n'(x)\\
&= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= x\left(\frac{1}{(1-x)^2}G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}\times\frac{1}{(1-x)^2}G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-x}\times\frac{x}{1-x}\left(G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-x}\times\frac{x}{1-x}\left(G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(1+\frac{x}{1-x}\right)G_n'\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-x}G_{n+1}\left(\frac{x}{1-x}\right),
\end{aligned}$$

par la relation donnée par l'énoncé (qu'il suffit d'évaluer en $\dfrac{x}{1-x}$).

On a donc bien démontré, par récurrence, que pour tout $n\geq 0$ et pour tout $x\in]-1,1[$,
$\boxed{D_n(x) = \dfrac{1}{1-x}G_n\left(\dfrac{x}{1-x}\right).}$

Q6. On a $\boxed{F_1 = \binom{0}{0}F_0 = 1\times F_0 = 1.}$

On a aussi $\boxed{F_2 = \binom{2}{0}F_0 + \binom{2}{1}F_1 = 1\times F_0 + 2F_1 = 3.}$

De même, $\boxed{F_3 = \binom{3}{0}F_0 + \binom{3}{1}F_1 + \binom{3}{2}F_2 = 1\times F_0 + 3F_1 + 3F_2 = 13.}$

Q7. Détaillons les partitions *non-ordonnées* de $\{1,2,3\}$, en fonction du nombre de parties :

— une partie : $\{\{1,2,3\}\}$;
— deux parties : $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$ et $\{\{3\},\{1,3\}\}$;
— trois parties : $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

La première partition donne une partition ordonnée : $(\{1,2,3\})$.

Il y a $2! = 2$ permutations sur un ensemble à deux éléments. Les trois partitions à deux parties donnent donc six partitions ordonnées : $(\{1\},\{2,3\})$, $(\{2,3\},\{1\})$, $(\{1\},\{1,3\})$, $(\{1,3\},\{2\})$, $(\{3\},\{1,2\})$, $(\{1,2\},\{3\})$.

Il y a $3! = 6$ permutations sur un ensemble à trois éléments. La dernière partition donne donc aussi six partitions ordonnées. Ce sont $(\{1\},\{2\},\{3\})$, $(\{1\},\{3\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\},\{3\})$, $(\{2\},\{3\},\{1\})$, $(\{3\},\{1\},\{2\})$, et $(\{3\},\{2\},\{1\})$,

Ainsi, $\boxed{u_3 = 13.}$

Q8. Soit $1 \leq k \leq n$, comptons le nombre de partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$ dont la première partie est de cardinal k. Pour cela, fixons une telle partie X : il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir X. Cette partie X étant fixée, les parties suivantes d'une telle partion ordonnée partitionnent les $n-k$ éléments restants. Il y a donc autant de partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$ commençant par X que de partitions ordonnées constituées uniquement d'éléments de $\{1, \dots, n\} \setminus X$, soit u_{n-k} telles partitions ordonnées.

En faisant varier X, toujours de cardinal k, il y a donc $\binom{n}{k}u_{n-k}$ partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$ dont la première partie est de cardinal k.

En faisant varier k, il y a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$ partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$.

Ainsi, $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}.}$

En posant $\ell = n-k$, on a donc $u_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{n-\ell} u_\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} u_\ell$, car pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{\ell} = \binom{n}{n-\ell}$.

On remarque que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même valeur initiale et la même relation de récurrence. On en déduit que ces suites sont égales.

Démontrons-le formellement. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: « $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $u_n = F_n$ ».

On peut plus simplement le démontrer par récurrence forte (HP).

Cette propriété a déjà été vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$, supposons que « $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $u_n = F_n$ ». Pour montrer cette propriété au rang $n+1$, il suffit de démontrer que $u_{n+1} = F_{n+1}$. Or, par ce la relation qui vient d'être démontrée par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} u_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} F_k = F_{n+1}.$$

On vient donc de démontrer, par récurrence simple, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: « $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $u_n = F_n$ ».

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = F_n.}$

Q9. $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.}$

Avec $x = \ln(2) > 0$, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ est à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles est croissante, donc toutes ses sommes partielles sont inférieures à la somme de cette série. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \mathrm{e}^x = 2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq 1}$.

Q10. Pour $n = 0$, considérons $k \in [\![0, 0]\!]$: on a $k = 0$, $F_k = 1$, $k! = 1$, $\ln(2)^k = 1$, donc on a bien $0 \leq \dfrac{F_k}{k!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^k}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}}$

Q11. On sait déjà que $F_n \geq 0$, car $F_n = u_n$ et u_n est un nombre de partitions ordonnées.

On a donc tout $0 \leq k \leq n-1$: $F_k \leq \dfrac{k!}{(\ln 2)^k}$, donc $\binom{n}{k} F_k \leq \binom{n}{k} \dfrac{k!}{(\ln 2)^k}$.

Ainsi, en sommant ces inégalités, on obtient

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{k!}{(\ln 2)^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k} = \frac{n!}{(\ln(2))^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\ln 2)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Or, en posant $\ell = n-k$ et en utilisant la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\ln 2)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(\ln 2)^\ell}{\ell!} \leq 1.$$

On a donc bien $F_n \leq \dfrac{n!}{(\ln 2)^n}$ et donc $\boxed{0 \leq \dfrac{F_n}{n!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}.}$

Par hypothèse de récurrence, on a déjà supposé que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq \dfrac{F_k}{k!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^k}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}$

Q12. On sait que la série entière (géométrique) $\sum \dfrac{z^n}{(\ln 2)^n}$ converge si et seulement si $\left|\dfrac{z}{\ln(2)}\right| \leq 1$, soit si et seulement si $|z| \leq \ln(2)$: cette série entière est donc de rayon $\ln(2)$.

Par les règles de comparaison de rayons de convergence de séries entières, $\boxed{R \geq \ln(2).}$

Q13. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{F_n}{n!}$. Ainsi, $\boxed{f^{(n)}(0) = F_n.}$
On évalue la relation donnée en $x = 0 \in]-R, R[$, car $R > 0$:

$$F_n = f^{(n)}(0) = G_n(1) f(0).$$

On a $f(0) = F_0 = 1$. De plus, en utilisant la relation trouvée en **Q5.** pour $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, on a

$$D_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2G_n(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{F_n = \frac{1}{2} D_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}.}$$

Q14. X est à valeurs dans $\boxed{X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![}$.

De plus, $\boxed{\text{pour tout } k \geq 1,\ P(X = k) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{2^k}.}$

Q15. Par la formule de transfert, X^n est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{k^n}{2^k}$ converge absolument. Or cette série correspond au développement en série entière de $D_n(x)$ pour $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$. À l'intérieur du domaine ouvert de convergence d'une série entière, cette série converge absolument (ici la série est à termes positifs, la convergence suffisait donc).
Ainsi, $\boxed{X^n \text{ est d'espérance finie, et par ce qui précède } E(X^n) = 2F_n.}$

Q16. On a donc, comme a n'est pas entier, $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$.
Ainsi,

$$[X \geq a] = \bigcup_{k = \lfloor a \rfloor + 1}^{+\infty} [X = k].$$

Ces événements étant deux à deux incompatibles, on obtient :

$$P(X \geq a) = \sum_{k = \lfloor a \rfloor + 1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k = \lfloor a \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

On reconnaît la série reste d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{P(X \geq a) = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}.}$$

Q17. On dresse le tableau de variations de g_n, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables. Pour $t \geq 0$:

$$g_n'(t) = nt^{n-1}\mathrm{e}^{-t\ln(2)} - \ln(2)t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)} = t^{n-1}\mathrm{e}^{-t\ln(2)}(n - t\ln(2)).$$

On a donc le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{n}{\ln(2)}$		$+\infty$
$g_n'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(t)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ s'obtient par croissances comparées.

Ainsi, g_n admet un maximum en $t = \dfrac{n}{\ln(2)}$, valant $\boxed{M_n = g_n\left(\dfrac{n}{\ln(2)}\right) = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}\ln(2)}\right)^n.}$

Q18. Soit $a > 0$, alors en notant p le plus petit entier supérieur ou égal à a :

$$P(X \geq a) = \sum_{k=p}^{+\infty} P(X = k).$$

Ainsi,

$$a^n P(X \geq a) = \sum_{k=p}^{+\infty} a^n P(X = k).$$

Or, dans cette somme, on a $k \geq p \geq a > 0$, donc $k^n \geq a^n > 0$. Comme $P(X = k) \geq 0$, on obtient

$$a^n P(X \geq a) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} k^n P(X = k).$$

Or,

$$E(X^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n P(X = k) = \sum_{k=1}^{p-1} k^n P(X = k) + \sum_{k=p}^{+\infty} k^n P(X = k).$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} k^n P(X=k) \geq 0$, on a

$$E(X^n) \geq \sum_{k=p}^{+\infty} k^n P(X=k).$$

On a donc bien démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ a>0,\ E(X^n) \geq a^n P(X \geq a)}$.

Q19. En reprenant les questions précédentes, pour $a>0$ non entier, :

$$F_n = \frac{1}{2}E(X^n) \geq \frac{a^n}{2}P(X \geq a).$$

Ainsi, comme $0 \leq \lfloor a \rfloor < a$,

$$P(X \geq a) \geq \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} \geq \frac{1}{2^a} = \mathrm{e}^{-a\ln(2)}.$$

On obtient donc :

$$F_n \geq \frac{1}{2} g_n(a).$$

Or, comme $\ln(2)$ n'est pas rationnel, $\dfrac{n}{\ln(2)}$ n'est pas entier. En effet, on aurait sinon que $\ln(2) = \dfrac{n}{n/\ln(2)}$ est un nombre rationnel.

On peut donc appliquer ce qui précède en $a = \dfrac{n}{\ln(2)}$, et l'on obtient :

$$\boxed{F_n \geq \frac{1}{2}M_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\mathrm{e}\ln(2)}\right)^n.}$$

Q20. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ n'a donc qu'une singularité, en $+\infty$.

Soit $t \geq$, on a $g_n(t) = t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)/2}\mathrm{e}^{-t\ln(2)/2} = o\left(\mathrm{e}^{-t\ln(2)/2}\right)$, car par croissances comparées $t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t\ln(2)/2}$ est intégrable en $+\infty$, en tant que fonction de référence, car $\frac{\ln(2)}{2} > 0$.

Ainsi, par comparaison de fonctions intégrables, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Soit $M>0$. On utilise la formule d'intégration par parties en dérivant $t \mapsto t^{n+1}$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$) en $t \mapsto (n+1)t^n$ et en primitivant $t \mapsto \mathrm{e}^{-t\ln(2)}$ (qui est bien continue) en $t \mapsto -\frac{1}{\ln(2)}\mathrm{e}^{-t\ln(2)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^M t^{n+1}\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\ln(2)}\left[t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\right]_{t=0}^M + \frac{n+1}{\ln(2)}\int_0^M t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}M^n\mathrm{e}^{-M\ln(2)} + \frac{n+1}{\ln(2)}\int_0^M t^n\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme, par croissances comparées, $M^n\mathrm{e}^{-M\ln(2)} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient en passant à la limite lorsque $M \to +\infty$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.}$$

Q21. On le démontre par récurrence simple sur n.

En tant qu'intégrale de référence, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)} = \frac{0!}{(\ln 2)^{0+1}}$: c'est bien la relation demandée pour $n=0$.

Soit $n \geq 0$, supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$. Alors, par la relation précédente,

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\ln(2)} \times \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(\ln 2)^{n+2}}.$$

Ainsi, par récurrence simple, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}.}$

Q22. Posons $\boxed{N = \left\lfloor \dfrac{n}{\ln(2)} \right\rfloor}$: on a $0 \leq N < \dfrac{n}{\ln(2)} < N+1$.

De $0 \leq N < \dfrac{n}{\ln(2)}$, on tire que $[0,N] \subset \left[0, \dfrac{n}{\ln(2)}\right]$. Comme g_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{\ln(2)}\right]$, alors g_n est croissante sur $[0,N]$.

De $N+1 > \dfrac{n}{\ln(2)}$, on tire que $[N+1,+\infty[\subset \left[\dfrac{n}{\ln(2)}, +\infty\right[$. Comme g_n est décroissante sur $\left[\dfrac{n}{\ln(2)}, +\infty\right[$, alors g_n est décroissante sur $[N,+\infty[$.

Q23. Soit $0 \leq k \leq N-1$, alors par croissance de g sur $[k, k+1]$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$: $g_n(k) \leq g_n(t) \leq g_n(k+1)$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} g_n(k)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g_n(k+1)\mathrm{d}t,$$

soit

$$g_n(k) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq g_n(k+1).$$

En sommant ces inégalités pour $0 \leq k \leq k+1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{N-1} g_n(k+1),$$

soit encore, par la relation de Chasles et par décalage d'indice,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leq \int_0^N g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N} g_n(k).}$$

Q24. Sur $[N+1, +\infty[$, g_n est continue, décroissante et positive. Par comparaison série-intégrale, $\sum_{k \geq N+1} g_n(k)$ a même nature que $\int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$, donc converge car g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On procède de même que précédemment, pour tout $M \in \mathbb{N}$ vérifiant $M \geq N+1$, et tout $N+1 \leq k \leq M$, on a par décroisssance de g_n :

$$g_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq g_n(k).$$

En sommant et par les mêmes simplifications :

$$\sum_{k=N+2}^{M+1} g_n(k) \leq \int_{N+1}^{M} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=N+1}^{M} g_n(k).$$

En passant à la limite lorsque $M \to +\infty$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leq \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k).}$$

Q25. En sommant les inégalités obtenues aux deux questions précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) + \sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leq \int_0^N g_n(t)\mathrm{d}t + \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N} g_n(k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k),$$

soit, en utilisant le fait que $g_n(0) = 0$,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_n(k)\right) - g_n(N) - g_n(N+1) \leq \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t - \int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} g_n(k).$$

Comme $g_n(k) = \dfrac{k^n}{2^k}$, on a donc par la relation obtenue en **Q13.** et la valeur obtenue en **Q21.**

$$2F_n - g_n(N) - g_n(N+1) \leq \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} - \int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq 2F_n.$$

Ainsi,

$$\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t - g_n(N) - g_n(N+1) \leq \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} - 2F_n \leq \int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

En multipliant toutes ces inégalités par -1, on obtient exactement

$$\boxed{-\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leq -\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t + g_n(N) + g_n(N+1).}$$

Q26. On a donc

$$-\frac{1}{2}\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq F_n - \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq \frac{1}{2}(g_n(N) + g_n(N+1)).$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq g_n(t) \leq M_n$, ce qui montre que $\dfrac{1}{2}(g_n(N)+g_n(N+1)) \leq M_n$.
De plus, $-M_n \leq -g_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc

$$-\int_N^{N+1} M_n\mathrm{d}t \leq -\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t,$$

soit

$$-M_n \leq -\int_N^{N+1} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\boxed{-\frac{1}{2}M_n \leq F_n - \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq M_n.}$$

On obtient donc en divisant par $\dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} > 0$:

$$-\frac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!} \leq F_n \div \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} - 1 \leq \frac{2M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!}.$$

Or, $M_n = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}\ln(2)}\right)^n$, donc par la formule de Stirling :

$$\frac{M_n(\ln 2)^n}{n!} = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\dfrac{M_n(\ln 2)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{M_n(\ln 2)^{n+1}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par encadrement, $F_n \div \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $F_n \div \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $\boxed{F_n \sim \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}.}$

Q27. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'énoncé nous donne que $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, $2P(X) - P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ_n.

Montrons aussi la linéarité de φ_n. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) - (\lambda P + \mu Q)(X+1)\\ &= \lambda(2P - P(X+1)) + \mu(2Q - Q(X+1))\\ &= \lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

Q28. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul vérifiant $\varphi_n(P) = \lambda P$. Notons aX^p le monôme dominant de P, alors $2P$ a pour monôme dominant $2aX^p$ et $P(X+1)$ a pour monôme dominant aX^p, donc $\varphi_n(P)$ a pour monôme dominant (et de degré p) $2aX^p - aX^p = aX^p$. De même, λP a comme monôme de degré p : $\lambda a X^p$.

Comme $2P - P(X+1) = \lambda P$, on a par unicité des coefficients : $a = \lambda a$, et comme $a \neq 0$, on a $\boxed{\lambda = 1.}$

Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de φ_n, donc $E_0(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$. Ainsi, $\boxed{\varphi_n \text{ est injectif.}}$

Q29. Si $n = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(\lambda) = \lambda$: $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable.

Si φ_n était diagonalisable, comme 1 est la seule valeur propre de φ_n, il existerait une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_n) = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$. On aurait donc $\varphi_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui est absurde car par exemple $\varphi_n(X) = 2X - (X+1) = X - 1$.

Ainsi, $\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable si et seulement si } n = 0.}$

Q30. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et comme φ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$, φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{il existe un unique } P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \varphi_n(P_n) = X^n.}$

Q31. On sait déjà que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $p = \deg(P_n) \leq n$. Si $p < n$, alors $P_n \in \mathbb{R}_p[X]$, donc $\varphi_n(P_n) = \varphi_p(P_n) \in \mathbb{R}_p[X]$, car φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ (avec la convention $\mathbb{R}_{-\infty}[X] = \{0\}$).

C'est absurde, car $\varphi_n(P_n) = X^n \notin \mathbb{R}_p[X]$, donc $\boxed{\deg(P_n) = n.}$

Q32. En évaluant la relation $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$ en $k \in \mathbb{N}$, on obtient $2P_n(k) - P_n(k+1) = k^n$, soit en divisant par $2^k \neq 0$:

$$\boxed{\frac{k^n}{2^k} = \frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k}.}$$

On peut donc sommer ceci, et par simplification télescopique : pour $N \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k^n}{2^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k} = 2P_n(0) - \frac{P_n(N+1)}{2^N}.$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{P_n(N+1)}{2^N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = 2P_n(0).$$

Par le résultat obtenu en **Q13.**, on a donc

$$\boxed{P_n(0) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = F_n.}$$

Q33. On dérive la relation $2P_{n+1}(X) - P_{n+1}(X+1) = X^{n+1}$ pour obtenir, par linéarité de φ_n :

$$2P'_{n+1}(X) - P'_{n+1}(X+1) = (n+1)X^n = (n+1)\varphi_n(P_n) = \varphi_n((n+1)P_n).$$

Comme $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $P'_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$, donc la relation précédente s'écrit

$$\varphi_n(P'_{n+1}) = \varphi_n((n+1)P_n).$$

Par injectivité de φ_n, $\boxed{P'_{n+1} = (n+1)P_n.}$

Q34. Par la formule de Taylor, comme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

On montre par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)P_{n-k}.$$

Pour $n = 0$, considérons $k = 0$: on a bien $P_0^{(0)} = P_0$, ce qui est la relation demandée.
Soit $n \geq 0$, supposons que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)P_{n-k}.$$

La relation demandée pour $k = 0$ s'écrit $P_{n+1}^{(0)} = P_{n+1}$, ce qui est vrai. Soit $1 \leq k \leq n+1$. On a $P'_{n+1} = (n+1)P_n$. En dérivant $k-1$ fois, on obtient, par linéarité de la dérivation, $P_{n+1}^{(k)} = (n+1)P_n^{(k-1)}$. Comme $0 \leq k-1 \leq n$, on a par hypothèse de récurrence :

$$P_n^{(k-1)} = n(n-1)\dots(n-(k-1)+1)P_{n-(k-1)} = n(n-1)\dots(n+1-k+1)P_{n+1-k},$$

donc

$$P_{n+1}^{(k)} = (n+1)n(n-1)\dots(n-(k-1)+1)P_{n-(k-1)} = n(n-1)\dots(n+1-k+1)P_{n+1-k}.$$

La propriété est donc héréditaire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)P_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}F_{n-k},$$

par la **Q32.**. Comme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, on a donc bien obtenu

$$\boxed{P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k.}$$

Q35. Par la question **Q31.**, on sait que $\deg(P_0) = 0$, $\deg(P_1) = 1$,..., $\deg(P_n) = n$.
Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: c'est une famille libre de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ (unique) tel que } P_n = a_0P_0 + \dots + a_nP_n.}$

Q36. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par la règle de dérivation composée, $(P(X+1))' = P'(X+1)$, donc par une récurrence immédiate, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(P(X+1))^{(j)} = P^{(j)}(X+1)$.
Par linéarité de la dérivation, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\varphi_n(P))^{(j)} = 2P^{(j)}(X) - P^{(j)}(X+1) = \varphi_n(P^{(j)}).}$$

On a donc pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_n(P^{(j)}(0))\varphi_n(Q^{(j)})(0)}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(j)}(0)\varphi_n(Q)^{(j)}(0)}{(j!)^2}$$

La symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est immédiate. Par linéarité de φ_n, de l'évaluation en 0 et de la dérivation, et par opérations sur les applications linéaires, si Q est fixé, $P \mapsto \langle P, Q \rangle$ est linéaire, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\varphi_n(P)^{(j)}(0)}{j!} \right)^2 \geq 0.$$

La positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc établie. Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. Une somme de termes positifs ne s'annulant que lorsque tous ces termes sont nuls, on a donc

$$\varphi_n(P)(0) = \varphi_n(P)'(0) = \dots = \varphi_n(P)^{(j)}(0).$$

Par la formule de Taylor polynomiale,

$$\varphi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!} = 0 = \varphi_n(0).$$

Par injectivité de φ_n, $P = 0$, ce qui assure le caractère défini-positif de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Ainsi, $\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

Q37. On a

$$2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1) = \varphi_k(P_k^{(j)})(0) = \varphi_k(P_k)^{(j)}(0) = (X^k)^{(j)}(0).$$

Or, si $j > k$, $(X^k)^{(j)} = 0$, donc $(X^k)^{(j)}(0) = 0$.

Si $j \leq k$,
$$(X^k)^{(j)} = k(k-1)\dots(k-j+1)X^{k-j}.$$
Ainsi, si $j = k$, $(X^k)^{(j)} = k!$ et $(X^k)^{(j)}(0) = 0$. Sinon, 0 est racine de $(X^k)^{(j)}$ et donc $(X^k)^{(j)}(0) = 0$.
On a donc bien montré que :

$$\boxed{2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ k! & \text{si } j = k. \end{cases}}$$

Ainsi, si $k \neq \ell$, comme

$$\langle P_k, P_\ell \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1))(2P_\ell^{(j)}(0) - P_\ell^{(j)}(1))}{(j!)^2},$$

alors tous les termes de cette somme seront nuls, donc $\langle P_k, P_\ell \rangle = 0$.
De plus,
$$\langle P_k, P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1))^2}{(j!)^2}.$$
Un seul terme de cette somme n'est pas nul, lorsque $j = k$, on a donc par la relation précédente,
$$\langle P_k, P_k \rangle = \frac{(2P_k^{(k)}(0) - P_k^{(k)}(1))^2}{(k!)^2} = \frac{(k!)^2}{(k!)^2} = 1.$$
Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthonormée de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$

Q38. Par l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} \langle P, P_k \rangle P_k.$$

Or,
$$\langle P, P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{\varphi_n(P_k)^{(j)}(0)}{j!}.$$

On vient de démontrer que

$$\varphi_n(P_k)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ k! & \text{si } j = k, \end{cases}$$

donc $\langle P, P_k \rangle = \dfrac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!}$. Cela démontre bien que

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!} P_k.}$$