Q 1. Tout d'abord, comme $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, on rappelle que $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k)$.

Par définition, $\forall\, t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=E(t^X)$, donc, d'après le théorème du transfert :

$$\boxed{\forall\, t\in\mathbb{R},\quad G_X(t)=\sum_{k=1}^{n} t^{x_k} P(X=x_k)}$$

On a $P(X=x_k)\in]0,1[$ et on sait que $\{x_1,\dots,x_n\}\subset\mathbb{N}$; notons $d=\max\{x_1,\dots,x_n\}$, alors $d\in\mathbb{N}$ et ainsi G_X est une fonction polynomiale de degré d.

Q 2. $\boxed{G_X(1)=\sum_{k=1}^{n} P(X=x_k)=1}$

Q 3. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X(\Omega)=\{0,1\}$, et $P(X=1)=p$; $P(X=0)=1-p$.
Ainsi, $G_X(t)=t^1\times P(X=1)+t^0\times P(X=0)$; soit $\boxed{G_X(t)=pt+(1-p)}$

Q 4. Si X suit une loi de uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, et, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $P(X=k)=\frac{1}{n}$.

Ainsi, $G_X(t)=\sum_{k=1}^{n} t^k P(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}t^k$; soit $\boxed{G_X(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k}$

Q 5. Si X suit une loi de binomiale de paramètres $p\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, alors $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$, et, pour $k\in[\![0,n]\!]$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Ainsi, $G_X(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k)$ soit $\boxed{G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k}$

Q 6. On suppose que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,\dots,y_n\}$; alors $X+Y(\Omega)=\{x_1+y_1,\dots,x_1+y_n,\dots,x_n+y_1,\dots,x_n+y_n\}$.
D'une part, $P(X+Y=x_i+y_j)=P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$, par indépendance.

Donc $G_{X+Y}(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{x_i+y_j}P(X+Y=x_i+y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{x_i+y_j}P(X=x_i)P(Y=y_j)$

D'autre part, comme $t^{x_i}\times t^{y_j}=t^{x_i+y_j}$, on a :

$G_X(t)G_Y(t)=\sum_{i=1}^{n} t^{x_i}P(X=x_i)\times\sum_{j=1}^{n} t^{y_j}P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{x_i+y_j}P(X=x_i)P(Y=y_j)$, par distributivité.

On bien montré que $\boxed{\forall\, t\in\mathbb{R},\quad G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)}$

Q 7. On jette 2 dés à 6 faces, donc un événement élémentaire de l'univers Ω est un couple $(i,j)\in[\![1,6]\!]^2$.

Q 8. Z représente la somme des des deux faces obtenues, donc $\boxed{Z(\Omega)=[\![2,12]\!]}$

Q 9. On suppose que Z suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$, donc $\forall k\in[\![2,12]\!],\ P(Z=k)=\frac{1}{13}$.

$G_Z(t)=\sum_{k=2}^{12} t^k P(Z=k)=\frac{1}{13}\sum_{k=2}^{12} t^k \underset{\ell=k-2}{=}\frac{1}{13}\sum_{\ell=0}^{10} t^{\ell+2}=\frac{t^2}{13}\sum_{\ell=0}^{10} t^\ell$;

on a bien $\boxed{G_Z(t)=t^2P(t),\ \text{avec } P(t)=\frac{1}{13}\sum_{\ell=0}^{10} t^\ell \text{ un polynôme de degré } 10}$

Q 10. Les variables X et Y sont indépendantes, donc d'après **Q6** :

$G_Z(t)=G_X(t)G_Y(t)=\sum_{k=1}^{6} t^k P(X=k)\sum_{\ell=1}^{6} t^\ell P(Y=\ell)=\sum_{k=1}^{6}\alpha_k t^k\sum_{\ell=1}^{6}\beta_\ell t^\ell$;

on pose $i=k-1$ et $j=\ell-1$, il vient : $G_Z(t)=\sum_{i=0}^{5}\alpha_{i+1}t^{i+1}\sum_{j=0}^{5}\beta_{j+1}t^{j+1}=t^2\underbrace{\sum_{i=0}^{5}\alpha_{i+1}t^i}_{Q(t)}\underbrace{\sum_{j=0}^{5}\beta_{j+1}t^j}_{R(t)}$

On a bien : $\boxed{G_Z(t)=t^2Q(t)R(t),\quad \text{avec } Q\in\mathbb{R}_5[T] \text{ et } R\in\mathbb{R}_5(T)}$

Q 11. Par identification, on a donc $t^2P(t) = t^2Q(t)R(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $t^2\big(P(t) - Q(t)R(t)\big) = 0$; ainsi le polynôme $P - QR$ possède une infinité de racines, il est donc nul ; ce qui montre bien que $\boxed{P = QR}$
On sait que $Q \in \mathbb{R}_5[T]$ donc $\deg(Q) \leqslant 5$; de même $\deg(R) \leqslant 5$;
de plus $\deg(P) = 10$ et $\deg(P) = \deg(QR) = \deg(Q) + \deg(R)$; nécessairement : $\boxed{\deg(Q) = 5 \text{ et } \deg(R) = 5}$

Q 12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} z^k = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-z^{11}}{1-z} = 0 \\ z \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^{11} = 1 \\ z \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{11}}, \text{ avec } k \in [\![0,10]\!] \\ z \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{11}}, \text{ avec } k \in [\![1,10]\!]$

$\Leftrightarrow\ z = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$ avec $k \in [\![1,10]\!]$; or on sait que : $\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$
mais avec $k \in [\![1,10]\!]$, on ne peut pas avoir $\frac{2k}{11} \in \mathbb{Z}$ donc

$$\boxed{\text{l'équation } \sum_{k=0}^{10} z^k = 0 \text{ n'admet pas de solution réelle}}$$

Q 13. On sait qu'un polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.
Prouvons ce résultat pour Q par exemple. On note $t \mapsto Q(t)$ la fonction polynomiale associée.
On a $\deg(Q) = 5$, on peut donc écrire $Q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_5 t^5$ avec $a_5 \neq 0$; supposons $a_5 > 0$.
Tout d'abord la fonction Q est continue sur $\mathbb{R}$; de plus $\lim\limits_{t\to-\infty} Q(t) = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(a_5 t^5\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(a_5 t^5\right) = +\infty$; donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut en déduire que l'équation $Q(t) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{Q \text{ et } R \text{ ont chacun au moins une racine réelle}}$

Q 14. $P(t) = \dfrac{1}{13}\displaystyle\sum_{k=0}^{10} t^k$, donc, d'après **Q12**, P ne possède pas de racine réelle.
Mais, d'après **Q11**, $P = QR$ et on vient de montrer que Q et R possède chacun une racine réelle ; donc c'est contradictoire. $\boxed{\text{Il n'est donc pas possible de piper les dés pour que } Z \text{ suive une loi uniforme.}}$

Q 15. On a $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k$ et on pose $a_k = P(X=k)$; par définition d'une probabilité, on a $a_k \leqslant 1 = b_k$;
or la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$ a un rayon de convergence R_b égal à 1 ;
par théorème on en déduit que $\boxed{R = R_a \geqslant R_b = 1}$

Q 16. Le rayon de convergence de la série entière définissant G_X est R, donc $\boxed{G_X \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-R,R[}$

Q 17. Si $R > 1$, alors $1 \in]-R,R[$ et ainsi G_X est au moins deux fois dérivable en 1.
Tout d'abord, $E(X) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} kP(X=k)$.
D'après le théorème de dérivation terme à terme on a, pour tout $x \in]-R,R[$; $G'_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k t^{k-1} P(X=k)$;
en particulier, $G'_X(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$; ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k)$ converge et ainsi que X admet une espérance vérifiant $\boxed{E(X) = G'_X(1)}$
De même, $E\big(X(X-1)\big) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)P(X=k)$;
or $G"_X(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,t^{k-2} P(X=k)$; on a bien $\boxed{E\big(X(X-1)\big) = G"_X(1)}$
Pour finir, $V(X) = E\big(X^2\big) - \big(E(X)\big)^2 = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2$ par linéarité de l'espérance, et donc X admet une variance donnée par

$$\boxed{V(X) = G"_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2}$$

Q 18. $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$; on pose $u_k = \left| t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right|$; alors

$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1} k!}{e^{-\lambda}\lambda^k (k+1)!} \left| \frac{t^{k+1}}{t^k} \right| = \frac{\lambda |t|}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; or $0 < 1$, donc, d'après le théorème de d'Alembert, la série converge absolument pour tout t réel, et ainsi $\boxed{R = +\infty}$

On a bien : $\boxed{G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{t^k \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}}$

Q 19. Tout d'abord, $G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$; donc $G'_X(t) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda t}$ et donc $G'_X(1) = \lambda$.

Ensuite $G_X"(t) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda t}$; donc $G_X"(t) = \lambda^2$.

Comme $R = +\infty$, on peut utiliser les résultats de la question **Q17**, et donc X admet une espérance et une variance qui vérifient :

$$\boxed{E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda}$$

Q 20. L'événement $(Y = 0)$ est réalisé lorsque $(X = 0)$ ou lorsque X est impair ; donc :

$$P(Y=0) = P(X=0) + P(X \text{ impair}) = P(X=0) + P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2k+1)\right) = P(X=0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1)$$

$$= e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ ; on a bien :}$$

$$\boxed{P(Y=0) = e^{-\lambda}\big(1 + f(\lambda)\big), \quad \text{avec } f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

Q 21. $\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2}\big(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\big) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 - (-1)^n\big) \frac{\lambda^n}{n!}$

Or $(1-(-1)^n) = 0$ si n est pair et $(1-(-1)^n) = 2$ si n est impair ; donc $\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \times \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Ce qui donne bien : $\boxed{f(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}}$

Q 22. On obtient ainsi $\boxed{P(Y=0) = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}\right)}$

Ensuite, pour $k > 0$, $P(Y = k) = P(X = 2k)$ soit $\boxed{P(Y=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*}$

Q 23. $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (2k) \times \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}$;

on pose $n = k-1$, il vient : $E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+2}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} f(\lambda)$; ce qui donne :

$$\boxed{E(Y) = \frac{\lambda}{4}\big(1 - e^{-2\lambda}\big)}$$

Q 24. $Z = XY$, donc l'événement $(Z = 0)$ est réalisé lorsque $(X = 0)$ ou que $(Y = 0)$; ainsi :

$$P(Z=0) = P\big((X=0) \cup (Y=0)\big) = P(X=0) + P(Y=0) - P\big((X=0) \cap (Y=0)\big)$$

$$= P(X=0) + P(Y=0) - P(X=0)P(Y=0), \text{ par indépendance.}$$

Soit, $P(Z=0) = e^{-\lambda} + (1-p) - (1-p)e^{-\lambda}$, ce qui donne bien : $\boxed{P(Z=0) = q + pe^{-\lambda}}$, avec $q = 1-p$.

Q 25. Tout d'abord, pour $k \neq 0$, l'événement $(Z=k)$ est réalisé lorsque $(X=k)$ et que $(Y=1)$.

On a donc, pour $k \neq 0$, $P(Z=k) = P\big((X=k)\cap(Y=1)\big) = P(X=k)P(Y=1) = p\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_Z(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(Z=k) = P(Z=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} t^k P(Z=k) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$;

soit, $G_Z(t) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda} + p\mathrm{e}^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = q + p\mathrm{e}^{-\lambda} + p\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1\right) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda} + p\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right)$;

ce qui donne : $\boxed{G_Z(t) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}}$

D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$, d'après **Q3**, $G_Y(t) = q + pt$; et, d'après **Q18**, $G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$; on a donc :

$G_Y \circ G_X(t) = G_Y\big(G_X(t)\big) = q + p\big(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}\big) = \boxed{q + p\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}}$. On a bien montré que $\boxed{G_Z = G_Y \circ G_X}$

Q 26. D'après **Q17**, $E(Z) = G'_Z(1)$; or $G'_Z(t) = p\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$. On obtient donc $\boxed{E(Z) = p\lambda}$.

Remarque : on constate que $E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y)$

$V(Z) = G''_Z(1) + G'_Z(1) - \big(G'_Z(1)\big)^2 = p\lambda^2 + p\lambda - (p\lambda)^2$; ce qui donne : $\boxed{V(Z) = p\lambda\big(1 + q\lambda\big)}$