Première partie

1. On calcule successivement
$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$$
puis
$$T_3 = 2X\left(2X^2 - 1\right) - X = 4X^3 - 3X$$
et enfin
$$T_4 = 2X\left(4X^3 - 3X\right) - \left(2X^2 - 1\right)$$
ce qui donne bien
$$\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1.}$$

2. On cherche les réels a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b$ vérifie $z^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$. Cela impose
$$a^2 + b^2 = |z|^2 = \frac{|4 + 3i|}{8} = \frac{5}{8}$$
et par ailleurs
$$z^2 = \left(a^2 - b^2\right) + 2\mathrm{i}ab.$$
Alors
$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i} \\ |z|^2 = \dfrac{5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(a^2 - b^2\right) + 2\mathrm{i}ab = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i} \\ a^2 + b^2 = \dfrac{5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2ab = \dfrac{3}{8} \\ a^2 + b^2 = \dfrac{5}{8} \end{array}\right.$$
en égalisant les parties réelle et imaginaire, puis par $\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(L_1 + L_3\right)/2 \\ \left(L_3 - L_1\right)/2 \end{array}\right.$:
$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9/16 \\ ab = 3/16 \\ b^2 = 1/16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = 1/4 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a = -3/4 \\ b = -1/4 \end{array}\right.$$
car la relation $ab = \dfrac{3}{16}$ impose que a et b aient même signe.
En conclusion, les racines carrées de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$ sont :
$$\boxed{\frac{3 + \mathrm{i}}{4} \text{ et } -\frac{3 + \mathrm{i}}{4}.}$$
En conjuguant : $z^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z}^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$, donc les racines carrées et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$ sont :
$$\boxed{\frac{3 - \mathrm{i}}{4} \text{ et } \frac{-3 + \mathrm{i}}{4}.}$$

3. On commence par écrire
$$T_4(z) = -\frac{17}{8} \Leftrightarrow 8z^4 - 8z^2 + \frac{25}{8} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8Z^2 - 8Z + \dfrac{25}{8} = 0 \\ Z = z^2 \end{array}\right. .$$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$ et les solutions sont $\dfrac{8+6\mathrm{i}}{16} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$ et $\dfrac{8-6\mathrm{i}}{16} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}\mathrm{i}$.
Ainsi

$$T_4(z) = -\frac{17}{8} \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \text{ ou } z^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mathrm{i}$$

et avec les résultats de la question précédente on peut conclure que

$$\boxed{T_4(z) = -\frac{17}{8} \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{3+\mathrm{i}}{4}, \frac{-3-\mathrm{i}}{4}, \frac{3-\mathrm{i}}{4}, \frac{-3+\mathrm{i}}{4}\right\}.}$$

4. Montrons donc par récurrence double sur $n \geq 1$ la propriété

$$(H_n) \ : \quad \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1} \text{ et } \deg(T_n) = n.$$

Puisque $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$, (H_1) et (H_2) sont vérifiées.
Supposons, pour $n \geq 1$, les propriétés (H_n) et (H_{n+1}) réalisées.
Par définition l'on a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
Puisque $\deg(2XT_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = n+2 > \deg(T_n) = n$, on a d'une part

$$\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n+2$$

et d'autre part

$$\mathrm{cd}(T_{n+2}) = \mathrm{cd}(2XT_{n+1}) = 2\mathrm{cd}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

ce qui établit (H_{n+2}).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1} \text{ et } \deg(T_n) = n.}$$

5. Montrer que T_n a même parité que n revient à démontrer que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ soit

$$T_n(X) = (-1)^n T_n(-X).$$

Considérons la suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n(X) = (-1)^n T_n(-X).$$

Elle vérifie $U_0 = T_0(-X) = 1 = T_0$, $U_1 = -T_1(-X) = X = T_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= (-1)^{n+2} T_{n+2}(-X) = (-1)^{n+2}(-2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X)) \\ &= 2X(-1)^{n+1} T_{n+1}(-X) - (-1)^n T_n(-X) = 2XU_{n+1} - U_n. \end{aligned}$$

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont mêmes deux premiers termes, et vérifient la même relation de récurrence d'ordre deux. Elles sont donc égales, ce qui établit le résultat attendu.

Le polynôme T_n a même parité que n.

6. On peut procéder de nouveau par récurrence double, ou considérer la suite de terme général $a_n = T_n\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right)$ avec $z \in \mathbb{C}^*$ fixé.
D'après la relation de récurrence définissant $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) - T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right). \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right) a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \left(z + \dfrac{1}{z}\right) r + 1 = 0$, de discriminant

$$\Delta = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 4 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2$$

donc de racines

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} + \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = z \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} - \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z}.$$

Il existe donc deux constantes k_1 et k_2 telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = k_1 z^n + k_2 \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Mais $a_0 = 1$ et $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & k_1 + k_2 \\ \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) & = & k_1 z + k_2 \dfrac{1}{z} \end{array}\right.$$

et l'on constate que la solution $(k_1, k_2) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, attendue par l'énoncé, convient.
On a bien établi : $\boxed{\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*, \quad T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).}$

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On applique le résultat de la question précédente avec $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$.
D'une part
$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \cos(\theta)$$
et d'autre part
$$\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{2} = \cos(n\theta).$$
On a donc bien établi :
$$\boxed{\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La question précédente a montré que le polynôme T_n vérifie $(\star_n)$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $(\star_n)$. Alors pour tout réel θ :
$$(T_n - P)(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta)) - P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$$
donc pour tout réel $x \in [-1, 1]$:
$$(T_n - P)(x) = (T_n - P)(\cos(\arccos(x))) = 0.$$
Puisque le polynôme $T_n - P$ admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul, et $P = T_n$.
Le polynôme T_n est le seul à vérifier la relation $(\star_n)$.

9. En utilisant la relation $(\star_4)$, on peut affirmer que $\cos(4\theta) = T_4(\cos(\theta))$ pour tout θ réel.
Il reste à exploiter la question 1 pour conclure que
$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dérivons deux fois la relation $(\star_n)$. Pour tout θ réel :
$$-\sin(\theta)\,P'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$
puis
$$\sin^2(\theta)\,P''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)\,P'(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta)$$
donc
$$\left(\cos^2(\theta) - 1\right)P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)\,P'(\cos(\theta)) = n^2\cos(n\theta) = n^2 P(\cos(\theta)).$$
Ainsi le polynôme $Q = \left(X^2 - 1\right)P'' + XP' - n^2 P$ vérifie $Q(\cos(\theta)) = 0$ pour tout θ réel.
Comme à la question 8, on en déduit que Q est le polynôme nul car il a une infinité de racines.
Puisque $P = T_n$, on a établi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(X^2 - 1\right)T_n'' + XT_n' - n^2 T_n = 0.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
donc
$$\boxed{\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les réels $\theta_k = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ce sont des réels distincts de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{2n-1}{2n}\pi\right] \subset [0, \pi]$, et la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$, donc les réels $x_k = \cos(\theta_k)$, $0 \leq k \leq n-1$, sont distincts deux à deux.
Avec la question précédente et la relation $(\star_n)$ on a $T_n(x_k) = T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = 0$.
On vient donc de mettre en évidence n racines distinctes de T_n.
Mais T_n est de degré n d'après la question 4, donc admet au plus n racines.
On a donc déterminé toutes les racines du polynôme T_n.
$$\underline{\text{Les racines de } T_n \text{ sont les } n \text{ réels}}\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right), \underline{0 \leq k \leq n-1.}$$
Remarque : lorsque k décrit $[\![0, n-1]\!]$, $j = k+1$ décrit $[\![1, n]\!]$ et
$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2n}\right)$$
ce qui donne une autre expression des racines de T_n, utilisée à partir de la question 27.

Deuxième partie

13. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$, et y admet pour primitive la fonction $t \mapsto \arcsin(t)$.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x)$ admet donc une limite finie en 1, égale à $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et est égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

De même la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin(x)$ admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour limite finie en -1. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et est égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit, par définition, la convergence de I_0 et la valeur $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

L'intégrale I_0 est convergente et est égale à π.

14. Il s'agit de montrer que, pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente.
L'application PQ est continue sur $[-1,1]$, donc bornée sur ce segment :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-1,1], \quad |P(t)\,Q(t)| \leq M.$$

On en déduit que $\dfrac{|P(t)\,Q(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}}$ pour tout $t \in]-1,1[$, et la question précédente a montré que la fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$; il en est donc de même pour $t \mapsto \dfrac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

Cela signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui implique qu'elle converge.

L'application $\langle\, .\, ,.\rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

15. L'application est bien définie d'après la question précédente.
Elle est symétrique : pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle Q, P\rangle = \int_{-1}^1 \frac{Q(t)\,P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle.$$

Elle est bilinéaire : pour P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$ et α réel, par linéarité de l'intégrale

$$\langle P+\alpha Q, R\rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)\,R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \alpha\int_{-1}^1 \frac{Q(t)\,R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P, R\rangle + \alpha\langle Q, R\rangle$$

et par symétrie

$$\langle R, P+\alpha Q\rangle = \langle P+\alpha Q, R\rangle = \langle P, R\rangle + \alpha\langle Q, R\rangle = \langle R, P\rangle + \alpha\langle R, Q\rangle.$$

Elle est positive : pour P dans $\mathbb{R}[X]$, par positivité de l'intégrale

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geq 0}\mathrm{d}t \geq 0.$$

Supposons enfin avoir, pour P dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle P,P\rangle = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, elle est nulle sur cet intervalle. On en déduit $P(t) = 0$ pour tout $t \in\,]-1,1[$, et P est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines.
On peut conclure que

$$\underline{\text{l'application } (P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

16. Il suffit d'appliquer la question 14 avec par exemple $P = X^n$ et $Q = 1$ pour justifier l'existence de I_n.

$$\underline{\text{Les intégrales } I_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ sont convergentes.}}$$

Si n est un entier naturel impair, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est impaire, donc d'intégrale nulle sur l'intervalle $]-1,1[$ (par le changement $u = -t$). Notamment $I_1 = I_3 = 0$.
L'application $u \mapsto t = \cos(u)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. Par théorème de changement de variable :

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\cos^2(u)}{\sqrt{1-\cos^2(u)}} \sin(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\cos^2(u)}{|\sin(u)|}\sin(u)\,\mathrm{d}u$$

donc, puisque $\sin(u) \geq 0$ pour $u \in\,]0,\pi[$:

$$I_2 = \int_0^\pi \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

On a bien établi

$$\boxed{I_1 = I_3 = 0 \text{ et } I_2 = \frac{\pi}{2}.}$$

Remarque : le calcul de I_4 ne pose pas de problème, avec la question 9. Avec le même changement de variable :

$$I_4 = \int_0^\pi \cos^4(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^\pi \big(\cos(4u) + 8\cos^2(u) - 1\big)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin(4u)}{32}\right]_0^\pi + I_2 - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.$$

17. Avec la question précédente et la question 13 :

$$\|1\|_2^2 = \langle 1,1\rangle = I_0 = \pi, \quad \|X\|_2^2 = \langle X,X\rangle = I_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \left\|X^2\right\|_2^2 = \left\langle X^2,X^2\right\rangle = I_4 = \frac{3\pi}{8}$$

et

$$\langle X,1\rangle = I_1 = 0, \quad \left\langle X^2,1\right\rangle = \langle X,X\rangle = \frac{\pi}{2}, \quad \left\langle X,X^2\right\rangle = I_3 = 0.$$

Appliquons le procédé d'orthonormalisation.
On prend comme premier vecteur $E_0 = \dfrac{1}{\|1\|_2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
On prend comme deuxième vecteur $E_1 = \dfrac{A_1}{\|A_1\|_2}$ où

$$A_1 = X - \langle X,E_0\rangle E_0 = X - \frac{1}{\pi}\langle X,1\rangle 1 = X$$

donc $E_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}X$.

On prend comme troisième vecteur $E_2 = \dfrac{A_2}{\|A_2\|_2}$ où

$$A_2 = X^2 - \left\langle X^2, E_0\right\rangle E_0 - \left\langle X^2, E_1\right\rangle E_1 = X^2 - \frac{1}{\pi}\left\langle X^2, 1\right\rangle 1 - \frac{2}{\pi}\left\langle X^2, X\right\rangle X = X^2 - \frac{1}{2}$$

et

$$\|A_2\|_2^2 = \left\|X^2\right\|_2^2 - 2\left\langle X^2, \frac{1}{2}\right\rangle + \left\|\frac{1}{2}\right\|_2^2 = \left\|X^2\right\|_2^2 - \left\langle X^2, 1\right\rangle + \frac{1}{4}\|1\|_2^2 = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

donc $E_2 = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(X^2 - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(2X^2 - 1\right)$.

En conclusion, la base orthonormale obtenue est

$$\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_2\right\}.}$$

18. Le changement de variable est licite comme vu à la question 16.
Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on calcule donc, en utilisant $(\star_n)$ et $(\star_m)$:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\, T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{T_n(\cos(u))\, T_m(\cos(u))}{|\sin(u)|}\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\pi T_n(\cos(u))\, T_m(\cos(u))\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \cos(nu)\cos(mu)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mais $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ donc

$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-m)u)\,\mathrm{d}u.$$

Si l'on suppose $n \neq m$, alors $n - m \neq 0$ et $n + m \neq 0$ (car $n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$ puisqu'il s'agit d'entiers naturels). Dans ce cas

$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)u)}{n+m}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)u)}{n-m}\right]_0^\pi = 0.$$

Ceci prouve que

$$\underline{\text{la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale.}}$$

Supposons maintenant $n = m \neq 0$. Alors

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nu)}{2n}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\|T_n\|_2^2 = \dfrac{2}{\pi}$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|T_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Enfin, le polynôme $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}T_0$ est unitaire, d'après la question précédente, donc

$$\boxed{\|T_0\|_2 = \sqrt{\pi}.}$$

Troisième partie

Explicitons les courbes $\Gamma_0 : \begin{cases} x_0(t) & = & 1 \\ y_0(t) & = & t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, puis $\Gamma_1 : \begin{cases} x_1(t) & = & t \\ y_1(t) & = & 2t^2 - 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et enfin $\Gamma_2 : \begin{cases} x_2(t) & = & 2t^2 - 1 \\ y_2(t) & = & 4t^3 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

19. On note, sur les courbes précédentes, que le point $(1, 1)$ correspond au paramètre $t = 1$.
Il suffit donc de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(1) = 1$.
C'est une simple conséquence de la question 7 avec $\theta = 0$.
Chaque courbe Γ_n passe par le point $(1, 1)$.

20. On exploite la parité de T_n vue à la question 5.
Si n est pair, alors $x_n(-t) = x_n(t)$ et $y_n(-t) = -y_n(t)$ donc Γ_n admet (Ox) pour axe de symétrie.
Si n est impair, alors $x_n(-t) = -x_n(t)$ et $y_n(-t) = y_n(t)$ donc Γ_n admet (Oy) pour axe de symétrie.
La courbe Γ_n admet (Ox) ou (Oy) pour axe de symétrie, selon que n est pair ou impair.

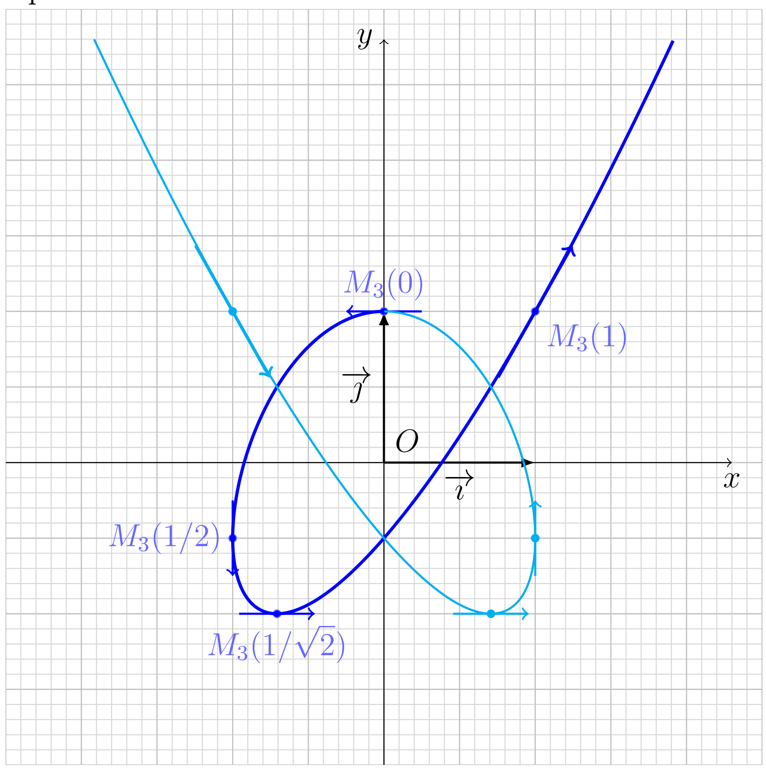
21. Explicitons : $\begin{cases} x_3(t) & = & 4t^3 - 3t \\ y_3(t) & = & 8t^4 - 8t^2 + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Les fonctions polynomiales x_3 et y_3 sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout t réel positif :
$$x_3'(t) = 3\left(4t^2 - 1\right) = 3(2t - 1)(2t + 1)$$
est du signe de $2t - 1$, et
$$y_3'(t) = 16t\left(2t^2 - 1\right) = 16t\left(\sqrt{2}t - 1\right)\left(\sqrt{2}t + 1\right)$$
est du signe de $\sqrt{2}t - 1$.
On obtient le tableau des variations suivant :

t	0		$1/2$		$\sqrt{2}/2$		1		$+\infty$
$x_3'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	9	$+$	
$x_3(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y_3(t)$	1	$\searrow$	$-1/2$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y_3'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	16	$+$	

On note que la courbe est régulière.

22. La courbe passe par le point $(1, 1)$, avec une tangente dirigée par $x_3'(1)\overrightarrow{\imath} + y_3'(1)\overrightarrow{\jmath}$, ou encore $9\overrightarrow{\imath} + 16\overrightarrow{\jmath}$.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $\dfrac{y_3(t)}{x_3(t)} \sim 2t \to +\infty$ donc la courbe présente une branche parabolique de direction (Oy).
On effectue le tracé selon le tableau de la question précédente, et l'on complète par symétrie d'axe (Oy) d'après la question 20.



Quatrième partie

23. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, donc pour $\alpha = 2$. Cela signifie que <u>la suite de terme général R_n est convergente.</u>

    On a par définition
$$\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

24. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ l'on calcule $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(x-1)}$ donc on prend $\boxed{(a, b) = (-1, 1).}$

25. Pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ donc par sommation télescopique
$$R_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$
    et en faisant tendre n vers l'infini on obtient $\boxed{\ell \leq 2.}$

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On scinde la somme R_{2n} selon la parité des indices :

$$R_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

donc

$$\boxed{R_{2n} = \frac{R_n}{4} + S_n.}$$

Puisque la suite de terme général R_n converge vers ℓ, il en est de même de la suite de terme général R_{2n}.

Comme $S_n = R_{2n} - \dfrac{R_n}{4}$, on en déduit que

la suite de terme général S_n converge, vers $\ell' = 3\ell/4$.

27. On rappelle que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1, ou de degré 2 sans racine réelle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a déterminé toutes les racines de T_n ; elles sont simples et réelles. On connaît aussi le coefficient dominant de T_n. On peut donc écrire

$$\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).}$$

Considérons la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{T_n'}{T_n}$, et sa décomposition en éléments simples.

Elle a une partie entière nulle, puisque $\deg(T_n') < \deg(T_n)$, et elle n'admet que des pôles simples. Sa décomposition en éléments simples est du type

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - x_k}.$$

On rappelle que l'élément simple $\dfrac{a_k}{X - x_k}$ relatif au pôle simple x_k de la fraction $\dfrac{P}{Q}$ se détermine par $a_k = \dfrac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$, soit ici $a_k = \dfrac{T_n'(x_k)}{T_n'(x_k)} = 1$.

Ainsi

$$\boxed{\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}.}$$

28. Puisque $x_k = \cos\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2n}\right)$, il s'agit d'évaluer en 1 l'égalité de la question précédente.

On a vu (à la question 19) que $T_n(1) = 1$.

Par ailleurs, en évaluant en 1 la relation de la question 10, on obtient $T_n'(1) - n^2 T_n(1) = 0$ donc $T_n'(1) = n^2$.

On peut conclure que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k} = n^2.}$$

29. On exploite la relation $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ pour écrire

$$1 - x_k = 1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2}$$
et avec la question précédente :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} = 2n^2.}$$
On a aussi, pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$\frac{1}{\tan^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1-\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} - \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} - n$$
soit, avec le calcul précédent ;
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} = 2n^2 - n.}$$

30. D'après le cours, pour tout x réel, $|\sin(x)| \leq |x|$, et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cela donne $\sin(x) \leq x$. Par ailleurs, la fonction $\varphi : x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, de dérivée positive car $\varphi'(x) = \tan^2(x)$. Elle est ainsi croissante sur cet intervalle, et donc positive car $\varphi(0) = 0$. Ainsi $x \leq \tan(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
En conclusion :
$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x).}$$

31. Ces inégalités portent sur des réels positifs, donc par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $[0, +\infty[$ l'on a
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 0 < \sin^2(x) \leq x^2 \leq \tan^2(x)$$
puis par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$:
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}.$$
Ce résultat s'applique à $x = \dfrac{(2k-1)\pi}{4n}$, $k \in [\![1, n]\!]$, car
$$\frac{\pi}{4n} \leq \frac{(2k-1)\pi}{4n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{4n} < \frac{\pi}{2}$$

et en sommant les inégalités pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2}$$

ce qui donne, avec la question précédente (et la notation définie par l'énoncé) :

$$2n^2 - n \leq \frac{16n^2}{\pi^2} S_n \leq 2n^2.$$

Comme $2n^2 - n \sim 2n^2$, on en déduit $\dfrac{16n^2}{\pi^2} S_n \sim 2n^2$ soit $S_n \sim \dfrac{\pi^2}{8}$.
On peut alors conclure

$$\boxed{\ell' = \frac{\pi^2}{8}}$$

et enfin, puisque $\ell = \dfrac{4}{3}\ell'$ d'après la question 26 :

$$\boxed{\ell = \frac{\pi^2}{6}.}$$