CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 6 avril 2024

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI

DURÉE : 2 HEURES

Conditions particulières :
Calculatrice autorisée
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024

Option Mathématiques

On se propose dans ce problème d'étudier la *transformation de Fourier* et l'inversion de celle-ci. A cet effet, on associe à toute fonction continue par morceaux et intégrable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sa *transformée de Fourier* $T(f) = T f$ et sa *transformée de Fourier conjuguée* $\overline{T}(f) = \overline{T} f$, qui sont deux fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$T f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2 i \pi t u} f(u)\,\mathrm{d}u \quad ; \quad \overline{T} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2 i \pi t u} f(u)\,\mathrm{d}u = T f(-t).$$

1°) *Un premier exemple de transformée de Fourier*

On étudie ici la transformée de Fourier $F = T f$ de la fonction $f : u \mapsto e^{-\pi u^2}$, définie donc par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}\,\mathrm{d}u\,.$$

a) Etablir que F est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et préciser $F'(t)$.
b) Etablir la relation $F'(t) = -2\pi t F(t)$ pour tout nombre réel t.
c) En déduire la transformée de Fourier $F = T f$ de f en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u = 1$.

2°) *Un second exemple de transformée de Fourier*

On étudie ici pour $n \in \mathbb{N}^*$ les transformées de Fourier des fonctions $g_n : u \mapsto \exp\left(-\frac{2\pi |u|}{n}\right)$.
a) Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$, étudier l'existence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-a u}\,\mathrm{d}u$.
b) En déduire la transformée de Fourier Tg_n de la fonction g_n.

Vérifier que Tg_n est à valeurs positives, et pour tout réel $\alpha > 0$, préciser $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{|t|\geq\alpha} Tg_n(t)\right)$.

c) Par convention, on pose dans ce problème : $\int_{|t|\geq\alpha} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\alpha} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et pour tout réel $\alpha > 0$, préciser $\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3°) *Premières propriétés de la transformation de Fourier*

On considère dans cette question des fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec f continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et g continue, bornée, et intégrable sur $\mathbb{R}$ (on posera $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\}$).
a) Etablir que la fonction $T f$ est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est bornée par le réel $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
b) Justifier l'existence des deux intégrales suivantes pour tout réel x :

$$A(x) = \int_{-\infty}^{x} Tf(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2 i \pi t u} g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

c) Justifier la dérivabilité et expliciter la dérivée des fonctions A et B.
d) Déterminer les limites de $A(x)$ et $B(x)$ lorsque x tend vers -∞, puis lorsque x tend vers +∞.
e) En déduire l'égalité $A(x) = B(x)$ pour tout réel x, puis la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,Tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

4°) *Inversion de la transformation de Fourier*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$, et dont la transformée de Fourier Tf est aussi supposée intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) En posant $g(u) = e^{2i\pi x u}\, g_n(u)$ où x désigne un réel et g_n l'une des fonctions introduites au 2° avec $n \geq 1$, puis en exploitant l'égalité obtenue à la question 3.e), établir que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi x t}\, g_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi x t}\, g_n(t)\, \mathrm{d}t = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

On se propose maintenant de déterminer la limite de chacun des deux membres de cette égalité.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi x t}\, g_n(t)\, \mathrm{d}t$ en fonction de $\overline{T}(Tf)(x)$.

On suppose désormais que ***le réel x est un point de continuité de la fonction f****, de sorte qu'on a :*

$$(\forall\, \varepsilon > 0), (\exists\, \alpha > 0), (\forall\, \tau \in \mathbb{R}) : \quad |\tau| \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

c) Avec les notations introduites ci-dessus, établir, en découpant l'intervalle d'intégration, que :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leq \varepsilon + \left(\sup_{|\tau| \geq \alpha} Tg_n(\tau) \right) \|f\|_1 + |f(x)| \int_{|\tau|\geq\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

A l'aide des résultats obtenus au 2°, déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

d) En déduire qu'en tout point de continuité x de la fonction f, on a l'égalité $\overline{T}(Tf)(x) = f(x)$.

5°) *Application à la recherche d'autres transformées de Fourier*

a) En exploitant ces résultats, préciser la transformée de Fourier de la fonction $G_1 : u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$.

b) On considère un nombre complexe a de partie réelle strictement positive et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions h_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $h_n(u) = \frac{u^n}{n!}\, e^{-a u}$ si $u \geq 0$, et : $h_n(u) = 0$ si $u < 0$.

Déterminer Th_0, puis plus généralement Th_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $H_n : u \mapsto \frac{1}{(a+2i\pi u)^{n+1}}$ pour $n \geq 1$?

Que peut-on dire du cas $n = 0$?