1. $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3$; donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice } 3}$

2. $\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-3\\-5&\lambda-2&-6\\2&1&\lambda+3\end{vmatrix}\underset{C3\leftarrow C3-3C2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-5&\lambda-2&-3\lambda\\2&1&\lambda\end{vmatrix}\underset{L2\leftarrow L2+3L3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda+1&0\\2&1&\lambda\end{vmatrix}$

   $=\lambda\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\1&\lambda+1\end{pmatrix}=\lambda\big((\lambda-1)(\lambda+1)+1\big)$; donc $\boxed{\chi_A(\lambda)=\lambda^3,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}}$

3. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R}.}$ En revanche, la valeur propre 0 est de multiplicité 3 et il est clair que A n'est pas la matrice nulle, ce qui veut dire que le noyau de A n'est par $\mathbb{R}^3$ et donc que $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

4. $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-3&-9\\0&1&3\end{pmatrix}=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$; donc $\boxed{X_1=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}}$

   On résout $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\5&2&6&-3\\-2&-1&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\0&-3&-9&-3\\0&1&3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$; on peut prendre $\boxed{X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

   On résout $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\5&2&6&1\\-2&-1&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\0&-3&-9&6\\0&1&3&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\0&1&3&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$; on peut prendre $\boxed{X_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}$

5. On a $AX_1=0$, $AX_2=X_1$ et $AX_3=X_2$.

   Dans la base $\mathscr{B}=\big(X_1,X_2,X_3\big)$, la matrice semblable à A est $T=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}X_1\\X_2\\X_3\end{array}\\ \begin{array}{ccc}AX_1&AX_2&AX_3\end{array}\end{array}$ et donc $\boxed{P=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-3&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}}$

6. On pose $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(X(t))=\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}$, le système $X'(t)=TX(t)$ s'écrit : $\left\{\begin{array}{rcl}u'(t)&=&v(t)\\v'(t)&=&w(t)\\w'(t)&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{r}u(t)=\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\\v(t)=C_1t+C_2\\w(t)=C_1\end{array}\right.\quad\text{avec }\big(C_1,C_2,C_3\big)\in\mathbb{R}^3}$$

7. On pose $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_c}(X(t))=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, dans la base canonique $\mathscr{B}_c$; on a donc $P=\mathscr{P}_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}}$;

   et ainsi $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_c}(X(t))=P\times\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(X(t))$; soit $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-3&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\\C_1t+C_2\\C_1\end{pmatrix}$; on en déduit :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x(t)=-C_1t-C_2+C_1\\y(t)=-\frac{3C_1}{2}t^2+(-3C_2+C_1)t-3C_3+C_2-2C_1\\z(t)=\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\end{array}\right.\quad\text{avec }\big(C_1,C_2,C_3\big)\in\mathbb{R}^3}$$

8. Avec la condition initiale $X(0)=\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$; les constantes s'obtiennent en résolvant $\left\{\begin{array}{r}-C_2+C_1=0\\-3C_3+C_2-2C_1=-5\\C_3=1\end{array}\right.$

soit : $\left\{\begin{array}{r} -C_2+C_1=0 \\ C_2-2C_1=-2 \\ C_3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=2 \\ C_2=2 \\ C_3=1 \end{array}\right.$; ce qui donne $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x(t)=-2t \\ y(t)=-3t^2-4t-5 \\ z(t)=t^2+2t+1 \end{array}\right.}$

9. *Erreur d'énoncé*; il faut lire : En justifiant qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0$,...
   M est nilpotente d'indice p, donc M^p est la matrice nulle et M^{p-1} n'est pas la matrice nulle, donc il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $M^{p-1}X \neq 0$.
   Écrivons
   $$\lambda_1 X + \lambda_2 MX + \cdots \lambda_p M^{p-1}X = 0 \qquad ✪$$
   on multiplie cette égalité par M^{p-1} ; il vient :
   $$\lambda_1 M^{p-1}X + \lambda_2 M^p X + \cdots + \lambda_p M^{2p-2}X = 0$$
   or M est nilpotente d'indice p, donc $\forall k \geqslant p$, on a $M^k = 0$; dans l'égalité précédente, il reste $\lambda_1 M^{p-1}X = 0$; or $M^{p-1}X \neq 0$, donc $\lambda_1 = 0$.
   L'égalité ✪ devient :
   $$\lambda_2 MX + \lambda_3 M^2 X + \cdots \lambda_p M^{p-1}X = 0$$
   On multiplie cette fois par M^{p-2}, pour obtenir $\lambda_2 = 0$; et ainsi de suite...
   Nous avons $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } \left(X, MX, ..., M^{p-1}X\right) \text{ est libre}}$
10. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$; on note p sont indice de nilpotence.
    - ⋆ *Premier cas* : si $p \leqslant n$, alors $\forall k \geqslant p$, $M^k = 0_n$; en particulier $M^n = 0_n$.
    - ⋆ *Deuxième cas* : si $p > n$, on a donc $p-1 \geqslant n$;
      d'après la question précédente, la famille $\big(\underbrace{X, MX, ...M^{n-1}X}_{n \text{ vecteurs}}, M^nX, ..., M^{p-1}X\big)$ est libre. Mais la dimension de $\mathbb{C}^n$ étant égale à n, une famille libre ne peut contenir plus de n vecteurs. C'est contradictoire, donc nécessairement l'indice maximal de nilpotence est n.

    On a bien montré $\boxed{\forall M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}), \quad M^n = 0_n}$
11. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; alors $M^2 = 0_2$; soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; alors $N^2 = 0_2$; mais $M+N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente, car $\forall p \in \mathbb{N}$, $(M+N)^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & (-2)^p \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\mathcal{N}_2(\mathbb{C}) \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$
12. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) : \exists p \in \mathbb{N},\ M^p = 0_n$; soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) : \exists q \in \mathbb{N},\ N^q = 0_n$; on suppose de plus que M et N commutent; donc $(MN)^{pq} = M^{pq}N^{pq} = (M^p)^q (N^q)^p = 0_n$; donc $\boxed{MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})}$
13. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) : \exists p \in \mathbb{N},\ M^p = 0_n$; soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) : \exists q \in \mathbb{N},\ N^q = 0_n$; on suppose de plus que M et N commutent; donc $(M+N)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \begin{pmatrix} p+q \\ k \end{pmatrix} M^{p+q-k}N^k$.
    Dans la somme précédente, si $k \geqslant q$, alors $N^k = 0_n$; et si $k < q$, alors $p+q-k > p$ et $M^{p+q-k} = 0_n$; donc $(M+N)^{p+q} = 0_n$, ce qui montre que $\boxed{M+N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})}$
14. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) : \exists p \in \mathbb{N},\ M^p = 0_n$. Soit λ une valeur propre de M associée au vecteur propre X. Par définition, on a $MX = \lambda X$ et on montre aisément que $M^pX = \lambda^p X$. On a donc $\lambda^p X = 0$; or un vecteur propre ne peut être nul, donc $\lambda^p = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

    $$\boxed{\text{Une matrice nilpotente admet donc 0 comme unique valeur propre.}}$$

    Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, donc M est nécessairement trigonalisable, donc $\det(M)$ est le produit des valeurs propres, on en déduit

    $$\boxed{\det(M) = 0}$$

15. Soit $N \in \mathscr{N}(\mathbb{C})$ et non nulle. On vient de montrer que N admet 0 comme unique valeur propre. Cette valeur propre est donc de multiplicité n. Or le sous-espace propre associé est le noyau de N ; ce dernier ne peut pas être égal à $\mathbb{C}^n$ puisque N n'est pas la matrice nulle ; donc $\boxed{N \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

16. Dans la matrice J_n on remarque que toutes les colonnes sont égales, donc $\boxed{\det(J_n) = 0}$.

    Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 1,\ J_n^p = \begin{pmatrix} n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \end{pmatrix}$

    ⋆ *Initialisation.* $J_n^1 = J_n$ et $\begin{pmatrix} n^{1-1} & \cdots & n^{1-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{1-1} & \cdots & n^{1-1} \end{pmatrix} = J_n$, donc l'initialisation est établie.

    ⋆ *Hérédité.* On suppose que pour un certain p, on a $J_n^p = \begin{pmatrix} n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \end{pmatrix}$;

    $$J_n^{p+1} = J_n \times J_n^p \underset{\text{par hypothèse de récurrence}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \times n^{p-1} & \cdots & n \times n^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n \times n^{p-1} & \cdots & n \times n^{p-1} \end{pmatrix}$$

    Donc $J_n^{p+1} = \begin{pmatrix} n^p & \cdots & n^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^p & \cdots & n^p \end{pmatrix}$; ce qui établit l'hérédité.

    ⋆ *Conclusion.* On a montré par récurrence que $\forall p \geqslant 1,\ J_n^p = \begin{pmatrix} n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{p-1} & \cdots & n^{p-1} \end{pmatrix}$

    Le résultat précédent montre que $\boxed{\text{la matrice } J_n \text{ n'est par nilpotente}}$

17. On peut écrire : $M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & 0 & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & & \varphi(e_n) \end{array} \end{array}$

    Montrons par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$, que $\forall k$, on a : $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$.

    ⋆ *Initialisation.* $\varphi^1(e_1) = \varphi(e_1) = 0$, donc l'initialisation est établie.

    ⋆ *Hérédité.* On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$
    Soit $i \in [\![1, k+1]\!]$:
    - si $i \leqslant k$; $\varphi^{k+1}(e_i) = \varphi\big(\varphi^k(e_i)\big)$; par hypothèse de récurrence, on a $\varphi^k(e_i) = 0$, donc $\varphi\big(\varphi^k(e_i)\big) = 0$.
    - Si $i = k+1$; $\varphi^{k+1}(e_{k+1}) = \varphi^k\big(\varphi(e_{k+1})\big)$; d'après la matrice de φ, on remarque que $\varphi(e_{k+1}) \in \text{Vect}\big(e_1, \dots, e_k\big)$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\varphi^k\big(\varphi(e_{k+1})\big) = 0$.

    Dans les deux cas $\varphi^{k+1}(e_i) = 0$; ce qui établit l'hérédité.

    ⋆ *Conclusion.* On a montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \text{ on a} : \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0}$

18. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ alors M est trigonalisable ; donc, si M admet comme unique valeur propre 0, alors M est semblable à une matrice de la forme de celle de la question précédente. En notant φ l'endomorphisme canoniquement associé, on aura, dans une base $(e_1, \dots, e_n)$, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$.
    En particulier, on a $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \varphi^n(e_i) = 0$, ce qui prouve que $M^n = 0_n$ et donc que $\boxed{M \text{ est nilpotente}}$

19. On a $M = PNP^{-1}$; donc, par théorème, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $M^k = PN^kP^{-1}$.

Ainsi $\mathrm{e}^M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PN^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} N^k\right) P^{-1}$; ce qui montre bien que $\boxed{\mathrm{e}^M = P\mathrm{e}^N P^{-1}}$

20. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on a donc :

$\mathrm{e}^T = \frac{1}{0!}T^0 + \frac{1}{1!}T^1 + \frac{1}{2!}T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; soit $\boxed{\mathrm{e}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

21. On considère des matrices $\left(M_{i,j}\right)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ 0 \leqslant j \leqslant N}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j} &= \sum_{j=0}^{N} M_{0,j} + \sum_{j=0}^{N} M_{1,j} \cdots + \sum_{j=0}^{N} M_{N,j} \\
&= \sum_{j=0}^{N-0} M_{0,j} + \sum_{j=0}^{N-1} M_{1,j} + \sum_{j=N-1+1}^{N} M_{1,j} + \cdots + \sum_{j=0}^{N-N} M_{N,j} + \sum_{j=N-N+1}^{N} M_{N,j} \\
&= \sum_{j=0}^{N-0} M_{0,j} + \sum_{j=0}^{N-1} M_{1,j} + \cdots + \sum_{j=0}^{N-N} M_{N,j} + \sum_{j=N-1+1}^{N} M_{1,j} + \cdots + \sum_{j=N-N+1}^{N} M_{N,j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j}}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} \underset{s=i+j}{=} \sum_{i=0}^{N}\sum_{s=i}^{N} M_{i,s-i} &= \left(M_{0,0} + M_{0,1} + \cdots M_{0,N}\right) + \left(M_{1,0} + M_{1,1} + \cdots M_{1,N-1}\right) + \cdots + \left(M_{N,0}\right) \\
&= \left(M_{0,0}\right) + \left(M_{0,1} + M_{1,0}\right) + \cdots + \left(M_{0,N} + M_{1,N-1} + \cdots + M_{N,0}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}}$$

22. Nous avons vu à la question 10 que l'indice maximal de nilpotence est n, donc $\forall M \in \mathscr{N}_n(\mathbb{C})$, $\forall k > n$, on a $M^k = 0_n$. On peut donc écrire $\mathrm{e}^A = \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i$ et $\mathrm{e}^B = \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j$.

En utilisant les résultats précédents avec $M_{i,j} = \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j$; on a d'une part :

$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}B^j\right) = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j + \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j$;

dans la deuxième somme, si $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$ et $B^j = 0_n$; et si $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, alors $A^i = 0_n$; donc $\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j = 0_n$; et ainsi : $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{j!}B^j$

D'autre part puisque A et B commutent, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!}(A+B)^s = \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!}\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{\cancel{s!}}\sum_{i=0}^{s} \frac{\cancel{s!}}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i} \\
&= \sum_{s=0}^{2n}\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2n}\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!}A^i \frac{1}{(s-i)!} B^{s-i}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i}\frac{1}{i!}A^i\frac{1}{j!}B^j=\sum_{s=0}^{2n}\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!}A^i\frac{1}{(s-i)!}B^{s-i}$; ce qui montre bien

$$\boxed{e^A e^B = e^{A+B}}$$

23. Soit $M\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$; $e^M\times e^{-M}=e^{M-M}=e^{0_n}$; on rappelle que $e^M=\underbrace{\frac{1}{0!}M^0}_{=I_n}+\frac{1}{1!}M^1+\cdots+\frac{1}{n!}M^n$ donc $e^{0_n}=I_n$;

    ainsi $e^M\times e^{-M}=I_n$; ce qui prouve que $\boxed{e^M \text{ est inversible d'inverse } e^{-M}}$

24. $\forall N\in E,\ \exists M\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C}),\ N=e^M$; donc toute matrice N de E est inversible, et E ne contient donc pas la matrice nulle ; ainsi $\boxed{E \text{ n'est pas un } \mathbb{C}\text{−espace vectoriel}}$

25. Soit $M\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, on a : $e^M=I_n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}M^k$; or M est nilpotente, donc $\forall k\geqslant 1$, M^k est également nilpotente.

    De plus $\forall k\geqslant 1$ et $\forall k'\geqslant 1$, les matrices M^k et $M^{k'}$ commutent ; donc on peut appliquer le résultat de la question 13 et ainsi $M^k+M^{k'}$ est nilpotente, et, plus généralement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}M^k$ est nilpotente.

    On a bien montré que $\boxed{\forall M\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C}),\ e^M \text{ est une matrice unipotente}}$

26. A est nilpotente d'indice 3, donc $e^{At}=I_n+At+\dfrac{1}{2}A^2t^2$

    $$e^A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t&t&3t\\5t&2t&6t\\-2t&-t&-3t\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\3t^2&3t^2&9t^2\\-t^2&-t^2&-3t^2\end{pmatrix}\text{ ; on a bien :}$$

    $$\boxed{e^A=\begin{pmatrix}t+1&t&3t\\\frac{3}{2}t^2+5t&\frac{3}{2}t^2+2t+1&\frac{9}{2}t^2+6t\\-\frac{1}{2}t^2-2t&-\frac{1}{2}t^2-t&-\frac{3}{2}t^2-3t+1\end{pmatrix}}$$

    $$X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1&t&3t\\\frac{3}{2}t^2+5t&\frac{3}{2}t^2+2t+1&\frac{9}{2}t^2+6t\\-\frac{1}{2}t^2-2t&-\frac{1}{2}t^2-t&-\frac{3}{2}t^2-3t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\quad\text{; on retrouve bien :}$$

    $$\boxed{\begin{cases}x(t)=-2t\\y(t)=-3t^2-4t-5\\z(t)=t^2+2t+1\end{cases}}$$

27. Tout d'abord, comme $X_p\in S$, on a $\forall t\in\mathbb{R},\ X_p'(t)=AX_p(t)+B(t)$ soit $B(t)=X_p'(t)-AX_p(t)$.
    $X\in S\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=AX(t)+B(t)\Leftrightarrow X'(t)=AX(t)+X_p'(t)-AX_p(t)\Leftrightarrow X'(t)-X_p'(t)=AX(t)-AX_p(t)$
    $\Leftrightarrow \big(X(t)-X_p(t)\big)'=A\big(X(t)-X_p(t)\big)\Leftrightarrow X-X_p\in S_h$

28. On pose $X_p(t)=\begin{pmatrix}a\\bt\\ct^2\end{pmatrix}$, donc $X_p'(t)=\begin{pmatrix}0\\b\\2ct\end{pmatrix}$; on reporte dans le système différentiel :

    $$\begin{pmatrix}0\\b\\2ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\bt\\ct^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3t^2-t-1\\-6t^2-2t-4\\3t^2+3t+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3c-3)t^2+(b-1)t+a-1\\(6c-6)t^2+(2b-2)t+5a-4\\(-3c+3)t^2+(-b+3)t-2a+2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$$

    On a donc $\boxed{X(t)=\begin{pmatrix}-C_1t-C_2+C_1\\-\frac{3C_1}{2}t^2+(-3C_2+C_1)t-3C_3+C_2-2C_1\\\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix},\text{ avec }(C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3}$