

**Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024**  
**Épreuve de mathématiques PT – TSI**  
**Durée 3h – Calculatrice et documents interdits.**

---

**Exponentielle de matrices nilpotentes.**

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices nilpotentes et à la résolution de systèmes différentiels.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  comme pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désignera le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \in \mathbb{N}^*$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sera noté  $GL_n(\mathbb{K})$ .
- $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $0_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on notera par  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  avec les matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

On définit dans ce problème  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 1 Étude d'une matrice nilpotente

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Lorsqu'il existe un entier  $p$  tel que  $N^p = 0_n$ , on dira que la matrice  $N$  est **nilpotente**.

Le plus petit entier  $p$  vérifiant  $N^p = 0_n$ , est appelé **indice de nilpotence** de la matrice  $N$ .

On notera par  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $A$  est nilpotente. On déterminera également son indice de nilpotence.
2. Montrer que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \lambda^3$ .
3.  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ? Est-elle trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?
4. Déterminer  $X_1, X_2$  et  $X_3$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $AX_1 = 0, AX_2 = X_1$  et  $AX_3 = X_2$ .  
On choisira  $X_1, X_2$  et  $X_3$  de sorte que la 3<sup>e</sup> coordonnée de  $X_1$  soit 1 et que celle de  $X_2$  et de  $X_3$  soit nulle.
5. En déduire qu'il existe  $P \in GL_3(\mathbb{R})$ , que l'on précisera, telle que  $A = PTP^{-1}$ .  
On vérifiera que la seconde ligne de  $P$  a pour somme  $-4$ .
6. Déterminer les solutions du système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = TX(t)$ .
7. Déterminer les solutions du système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ .
8. On considère le système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ .

En déduire la solution vérifiant  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 2 Quelques propriétés des matrices nilpotentes

9. Soit  $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  d'indice de nilpotence  $p$ . En justifiant qu'il existe  $X \in \mathbb{C}^n$  non nul tel que  $M^{p-1}X \neq 0$ , montrer que la famille  $(X, MX, \dots, M^{p-1}X)$  est libre. (*Énoncé du concours corrigé*)
10. En déduire que  $\forall M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}), M^n = 0_n$ .
11. L'ensemble  $\mathcal{N}_2(\mathbb{C})$  est-il un espace vectoriel ? On justifiera sa réponse.
12. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  qui commutent. Montrer que  $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ .
13. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  qui commutent. Montrer que  $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ .
14. Soit  $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  a pour unique valeur propre 0. En déduire que  $\det(M) = 0$ .

15. Soit  $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  non nulle. Montrer que  $N$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

16. Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. Montrer que la matrice  $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  a un déterminant nul sans pour autant être nilpotente.

17. Soit  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure à diagonale nulle (c'est-à-dire  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \geq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$ ).

En considérant  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  est  $M$ , montrer par récurrence que la propriété «  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \varphi^k(e_i) = 0$  » est vérifiée pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

En déduire que  $M^n = 0_n$ .

18. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que si  $M$  a pour unique valeur propre 0 alors  $M$  est nilpotente.

### 3 Exponentielles de matrices nilpotentes

On définit l'exponentielle de  $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  par  $e^M = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$ .

19. Soit  $(M, N) \in (\mathcal{N}_n(\mathbb{C}))^2$  et soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tels que  $M = PNP^{-1}$ . Montrer que  $e^M = Pe^N P^{-1}$ .

20. Montrer que  $e^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Soit  $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ .

On considère les matrices  $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définies pour chaque entier  $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et chaque entier  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$

Montrer que  $\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N M_{i,j} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+1}^N M_{i,j}$  et justifier que  $\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^N \sum_{i=0}^s M_{i,s-i}$

22. En déduire, en remarquant que  $e^A e^B = \left( \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i \right) \left( \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j \right)$ , que  $e^{A+B} = e^A e^B$  lorsque  $A$  et  $B$  sont deux matrices nilpotentes qui commutent.

23. Soit  $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ . En déduire que  $e^M$  est inversible et déterminer son inverse.

24.  $E = \{e^M \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\}$  est-il un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

On appelle matrice **unipotente** toute matrice s'écrivant comme somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

25. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

### 4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet, dans cette partie, que  $\forall N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R}), X' = NX \Leftrightarrow X \in \{t \mapsto e^{tN} X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\}$ .

26. Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2 + 5t & \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1 & \frac{9}{2}t^2 + 6t \\ -\frac{1}{2}t^2 - 2t & -\frac{1}{2}t^2 - t & -\frac{3}{2}t^2 - 3t + 1 \end{pmatrix}$  puis retrouver la réponse à la

question 8.

27. Soit :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ;
- $\mathcal{S}_h$  l'ensemble des solutions du système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$  ;
- $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions du système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) + B(t)$  ;
- $X_p \in \mathcal{S}$ .

Montrer que  $x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X - X_p \in \mathcal{S}_h$ .

28. On considère le système différentiel :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) + B(t)$  avec  $\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 - t - 1 \\ -6t^2 - 2t - 4 \\ 3t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer une solution particulière sous la forme  $X_p = t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}$  avec  $a, b$  et  $c$  trois réels.

En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.

**Fin du sujet**