CCINP
Session 2020
Corrigé de l'épreuve de mathématiques TSI

Problème 1

Partie I – Préliminaires

1. Par définition, C_k est le sous-espace vectoriel engendré par f_k. Or $f_k \in E$, qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, donc C_k est un sous-espace vectoriel de E. De plus $f_k \neq 0_E$, donc la famille (f_k) est libre, c'est donc une base de C_k. Ainsi, $\dim(C_k) = 1$. De même, si $k \geq 1$, S_k est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. En revanche, g_0 est la fonction nulle, donc S_0 est un espace vectoriel de dimension 0.
2. Soit $f, g, h \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   - D'abord
   $$\varphi(g, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt = \varphi(f, g),$$
   donc φ est symétrique.
   - Ensuite, par linéarité de l'intégrale,
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g, h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t))\, h(t)\, dt = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) h(t)\, dt + \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) h(t)\, dt \\ &= \lambda\varphi(f, h) + \mu\varphi(f, h).\end{aligned}$$
   Donc φ est linéaire à gauche et, par symétrie, φ est linéaire à droite.
   - De plus,
   $$\varphi(f, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt.$$
   Or f^2 est une fonction positive, donc $\varphi(f, f) \geq 0$. Donc φ est positive.
   - Enfin, supposons que $\varphi(f, f) = 0$. Alors
   $$\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt = 0.$$
   Or f^2 est positive et continue sur $[0, 2\pi]$, donc
   $$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t)^2 = 0, \quad f(t) = 0.$$
   Ainsi f est nulle sur $[0, 2\pi]$. Or f est 2π-périodique, donc f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi φ est définie.

   On a donc montré que φ est un produit scalaire sur E.
3. D'une part, si $k = 0$, remarquons que f_0 est la fonction constante égale à 1, et
$$\|f_0\|^2 = \varphi(f_0, f_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1.$$

Ainsi $\|f_0\| = 1$. f_0 est donc une base orthonormée de C_0. D'autre part, si $k \geq 1$, on a

$$\|f_k\|^2 = \varphi\left(f_k, f_k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(kt\right)^2 dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos\left(2kt\right)\right) dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{\sin\left(2kt\right)}{8k\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\|f_k\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = 1\frac{\sqrt{2}}{.}$$

En posant $\widetilde{f_k} = \sqrt{2} f_k$ on a, par homogénéité de la norme,

$$\|\widetilde{f_k}\| = \|\sqrt{2} f_k\| = \sqrt{2}\|f_k\| = 1.$$

Donc $\widetilde{f_k}$ est une base orthonormée de C_k.

4. Notons p_k la projection orthogonale sur C_k. C_k est un espace vectoriel de dimension finie donc on connaît l'expression de p_k. D'une part, si $k = 0$,

$$p_0\left(f\right) = \varphi\left(f, f_0\right) f_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f\left(t\right) dt\right) f_0.$$

Autrement dit, $p_0\left(f\right)$ est la fonction constante égale à $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t\right) dt$. D'autre part, si $k \geq 1$, on a

$$p_k\left(f\right) = \varphi\left(f, \widetilde{f_k}\right)\widetilde{f_k} = 2\varphi\left(f, f_k\right) f_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f\left(t\right)\cos\left(kt\right) dt\right) f_k.$$

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_k\left(f\right)\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f\left(t\right)\cos\left(kt\right) dt\right)\cos\left(kx\right).$$

5. D'une part, si $k = 0$,

$$\varphi\left(f, f_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t\right) dt = a_0\left(f\right).$$

D'autre part, si $k \geq 1$,

$$\varphi\left(f, f_k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t\right)\cos\left(kt\right) dt = \frac{1}{2}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t\right)\cos\left(kt\right) dt = \frac{a_k\left(f\right)}{2}.$$

6. D'après les deux questions précédentes, pour tout $k \geq 0$,

$$p_k\left(f\right) = a_k\left(f\right) f_k.$$

Partie II – Série de Fourier

7. D'une part, $D_f = \mathbb{R}$ et, par imparité de la fonction sin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(-x\right) = |\sin\left(-2x\right)| = |-\sin\left(2x\right)| = |\sin\left(2x\right)| = f\left(x\right).$$

Donc f est paire. D'autre part,

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| = \left|\sin\left(2x+\pi\right)\right| = |-\sin\left(2x\right)| = |\sin\left(2x\right)| = f\left(x\right),$$

donc f est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique.

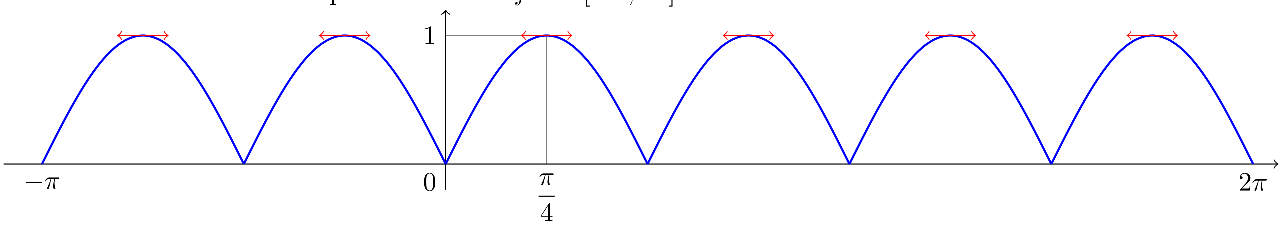
8. f étant $\dfrac{\pi}{2}$-périodique, on peut l'étudier sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Par parité, on peut ensuite restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = \sin(2x)$. f est donc dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 2\cos(2x).$$

Donc $f' \geq 0$ sur I. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

D'où l'allure de la courbe représentative de f sur $[-\pi, 2\pi]$:



9. La valeur moyenne de f sur une période est donnée par

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{\pi}[\cos(2x)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors d'après les formules d'Euler,

$$\sin(2x)\cos(4nx) = \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i4nx} + e^{-i4nx}}{2}\right) = \frac{e^{i(2+4n)x} - e^{-i(2+4n)x} + e^{i(2-4n)x} - e^{i-(2-4n)x}}{4i}$$
$$= \frac{\sin((2+4n)x) + \sin((2-4n)x)}{2}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos(4nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin((2+4n)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin((2-4n)x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((2+4n)x)}{2+4n} + \frac{\cos((2-4n)x)}{2-4n}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{2+4n} + \frac{-2}{2-4n}\right)$$
$$= \frac{2-42+2+4n}{(2+4n)(2-4n)} = \frac{4}{4-16n^2} = \frac{-1}{4n^2-1}.$$

12. La fonction f étant paire, la suite $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle. On a déjà calculé $a_0(f)$ à la question 9, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{\pi/2}x\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos(4nx)\,dx = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}.$$

13. D'après le théorème de Dirichlet, la fonction f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge en tout $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$:

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(4nx) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos(4nx).$$

En particulier, en évaluant cette égalité en $x = \dfrac{\pi}{4}$, on a

$$\left|\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 = \frac{2}{\pi} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi\left(4n^2-1\right)} = \frac{2-\pi}{4}.$$

Problème 2

Partie I – Exemple

14. Notons A la matrice canoniquement associée à f. Alors

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(A + I_2\right),$$

donc $f^2 = \dfrac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)$.

15. Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\chi_f = \det\left(XI_2 - A\right) = \begin{vmatrix} X-\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & X-\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left(X - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}.$$

Le discriminant de χ_f vaut

$$\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4},$$

donc les racines de χ_f sont

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\chi_f = (X-1)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.[1] Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. D'une part,

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x,y) &\iff \begin{cases} x+3y = 4x \\ 3x+y = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+3y = 0 \\ 3x-3y = 0 \end{cases} \iff x = y \\ &\iff (x,y) \in \mathrm{Vect}\left((1,1)\right). \end{aligned}$$

Donc $E_1(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) = -\frac{1}{2}(x,y) &\iff \begin{cases} x+3y = -2x \\ 3x+y = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+3y = 0 \\ 3x+3y = 0 \end{cases} \iff y = -x \\ &\iff (x,y) \in \mathrm{Vect}\left((1,-1)\right). \end{aligned}$$

Donc $E_{-1/2}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,-1)\right)$. Ainsi la famille $\left((1,1),(1,-1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme f.

1. La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable (en base orthonormée), mais on a besoin de connaître ses valeurs propres ici.

Partie II – Cas général

16. Puisque $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$, on a donc
$$\mathrm{Id}_E = 2f^2 - f = f \circ (2f - \mathrm{Id}_E)\,.$$
Ainsi f est une application linéaire inversible à droite, donc inversible, et $f^{-1} = 2f - \mathrm{Id}_E$.

17. Les ensembles $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ sont des noyaux d'endomorphismes, donc des sous-espaces vectoriels de E.

18. Montrons par analyse/synthèse que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$.

- Analyse : Soit $x \in E$, supposons qu'il existe $y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ tels que $x = y + z$. Alors
$$f(y) = y, \quad f(z) = -\frac{1}{2}z, \quad f(x) = f(y+z) = f(y) + f(z) = y - \frac{1}{2}z.$$
Ainsi
$$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = y - \frac{1}{2}z \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) \end{cases}.$$

- Synthèse : Pour $x \in E$, posons
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x), \quad z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)\,.$$
Alors, puisque $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$,
$$\begin{aligned} y + z &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) = x, \\ f(y) &= f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)\right) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) = y, \\ f(z) &= f\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)\right) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f(x) = -\frac{1}{2}z, \end{aligned}$$
Ainsi $x = y + z$ et $y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$.

L'existence étant assurée par la synthèse, et l'unicité par l'analyse, on en déduit que
$$\forall x \in E, \quad \exists!\,(y,z) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \times \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right), \quad x = y + z.$$
Donc $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ sont supplémentaires dans E.

19. Les applications f et Id_E sont linéaires, et $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$. D'où
$$(f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) = f \circ f - \mathrm{Id}_E \circ f + \frac{1}{2}f \circ \mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = 0.$$
Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$, alors par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \mathrm{Id}_E)(x)$. Donc
$$\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(y) = (f - \mathrm{Id}_E) \circ \left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(x) = 0,$$
donc $y \in \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$. D'autre part, d'après le théorème du rang, puisque $\dim(E) = n$ est finie,
$$\dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)) = \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = n - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E))\,.$$

Or d'après la question 18, $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ donc

$$\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim\left(\ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\right) = n, \quad \dim\left(\ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\right) = n - \dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)).$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)) = \dim\left(\ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\right)$ donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E) = \ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$.

20. Puisque $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$, on a bien

$$f^3 = f\circ f^2 = f\circ\left(\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)\right) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E + \frac{1}{2}f = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E,$$

$$f^4 = f\circ\left(\frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{3}{8}f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E + \frac{1}{4}f = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E.$$

21. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$.
- Initialisation : Rappelons que par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Alors, en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a

$$f^0 = \mathrm{Id}_E = a_0 f + b_0 \mathrm{Id}_E.$$

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$. Alors

$$f^{n+1} = f\circ f^n = f\circ(a_n f + b_n \mathrm{Id}_E) = a_n f^2 + b_n f = \frac{a_n}{2}f + \frac{a_n}{2}\mathrm{Id}_2 + b_n f = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right)f + \frac{a_n}{2}\mathrm{Id}_2.$$

En posant

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{2},$$

on a $f^{n+1} = a_{n+1}f + b_{n+1}\mathrm{Id}_E$, d'où hérédité.

On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n}{2} \end{cases}.$$

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}.$$

La suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_n}{2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique étant χ_f, on a déjà calculé sa racines, qui sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Donc il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 + (-1)^n\frac{C_2}{2^n}.$$

En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - \frac{C_2}{2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3\times 2^{n-1}}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}}$$

On remarque que cette formule reste vrai au rang $n = 0$.

23. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$, on déduit des calculs précédents que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}.$$

Problème 3

Partie I – Préliminaires

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 t^n e^{-t^2} = 0, \quad t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

25. La fonction $f_n :\mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'unique borne incertaine est donc $+\infty$. Or les fonctions f_n et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1+\infty[$ et, d'après la question précédente,

$$t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, par définition, il existe $a \geq 1$ tel que

$$\forall t \geq a, \quad t^2 f_n(t) \leq 1, \quad f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. D'après la relation de Chasles, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est une intégrale convergente.

26. La fonction $f_n$est continue sur $]-\infty,0]$. Par changement de variable $s=-t$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2} dt$ et $(-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} s^n e^{-s^2} ds$ ont même nature, or la seconde converge d'après la question précédente. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2} dt$ converge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente (par définition).

27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}$ et $a_0,\ldots,a_d \in \mathbb{R}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n X^n$. Pour tout $n \in [\![0,d]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ est convergente par linéarité de l'intégrale généralisée.

28. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,y]$, on a, par intégration par parties,

$$\int_x^y t^{n+2} e^{-t^2} dt = \int_x^y t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left[-t^{n+1}\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_x^y + \frac{n+1}{2}\int_x^y t^n e^{-t^2} dt.$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{n+1} e^{-x^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y^{n+1} e^{-y^2} = 0$. On peut alors passer à la limite quand $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$, et

$$I_{n+2} = 0 + \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{n+1}{2} I_n.$$

29. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ impair, la fonction $t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$ est impaire, et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt$ converge, donc

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt = 0.$$

30. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}$.

- Initialisation :D'après l'énoncé,

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = \frac{0!}{2^0 0!}\sqrt{\pi},$$

la propriété est donc vérifiée au rang 0.
- Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$. Alors

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+1)(2p+2)(2p)!}{2\times 2(p+1)\times 2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi},$$

la propriété est donc vérifiée au rang $p+1$.

On a donc montré que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Partie II – Recherche des extrema

31. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$. Alors d'après la question 27, l'intégrale $F(x, y)$ converge. Ensuite, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[t^4 - (2x+2y)t^3 + \left(x^2+4xy+y^2\right)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2\right] e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(I_4 - (2x+2y) I_3 + \left(x^2+4xy+y^2\right) I_2 - 2xy(x+y) I_1 + x^2y^2 I_0\right). \end{aligned}$$

Or d'après les questions 29 et 30,

$$I_0 = \sqrt{\pi}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2+4xy+y^2\right) + x^2y^2.$$

32. La fonction F est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + 2y + 2xy^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + y + 2x^2 y.$$

Alors, en remarquant que $1 + 2x^2 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) = (0,0) &\iff \begin{cases} 2x + y + 2x^2 y = 0 \\ x + 2y + 2xy^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-2x}{1+2x^2} \\ x - \dfrac{4x}{(1+2x^2)} + \dfrac{8x^3}{(1+2x^2)^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \dfrac{-2x}{1+2x^2} \\ \dfrac{-3x+4x^3+4x^5}{(1+x^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-2x}{1+2x^2} \\ -3x+4x^3+4x^5 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Alors, en notant $x^2 = z$,

$$-3x + 4x^3 + 4x^5 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x^4 + 4x^2 - 3 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4z^2 + 4z - 3 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $4x^2 + 4X - 3$ vaut $\Delta = 16 + 48 = 64$, donc ses racines sont

$$r_1 = \frac{-4-8}{8} = -\frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{-4+8}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$-3x+4x^3+4x^5=0 \iff x=0 \text{ ou } x^2=-\frac{3}{2} \text{ ou } x^2=\frac{1}{2} \iff x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y)=(0,0) &\iff \begin{cases} y=\dfrac{-2x}{1+2x^2} \\ x=0 \text{ ou } x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad .\end{aligned}$$

Les trois points critiques de la fonction F sont donc $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

33. On a $F(0,0)=\frac{3}{4}$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x,x)-F(0,0)&=\frac{3}{4}+\frac{x^2+4x^2+x^2}{2}+x^4-\frac{3}{4}=x^4+3x^2,\\ F(x,-x)-F(0,0)&=\frac{3}{4}+\frac{x^2-4x^2+x^2}{2}+x^4-\frac{3}{4}=x^4-x^2.\end{aligned}$$

34. Soit $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$. D'une part,

$$x^4+3x^2>0, \quad F(x,x)>F(0,0).$$

D'autre part,

$$x^4-x^2=x^2\left(x^2-1\right)<0, \quad F(x,-x)<F(0,0).$$

On en déduit qu'il n'existe par de voisinage de $(0,0)$ sur lequel F est toujours supérieure (ou toujours inférieure) à $F(0,0)$. Ainsi le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local de la fonction F.

Partie III – Intégrale dépendant d'un paramètre

35. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $s_x : t\mapsto \sin(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale étudiée admet une unique borne incertaine qui est $+\infty$. Or, pour tout $t\in[0,+\infty[$,

$$|s_x(t)|=|\sin(xt)|e^{-t^2}\leq e^{-t^2}.$$

Or d'après la question 25, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2dt}$ converge. Les fonctions s_x et $t\mapsto e^{-t^2}$ étant positives et continues sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|s_x(t)|dt$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}s_x(t)\,dt$ converge absolument, donc converge. De même, la fonction $c_x : t\mapsto t\cos(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $t\in[0,+\infty[$,

$$|c_x(t)|=t|\cos(xt)|e^{-t^2}\leq te^{-t^2}.$$

Or, toujours d'après la question 25, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2dt}$ converge. Les fonctions c_x et $t\mapsto te^{-t^2}$ étant positives et continues sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|c_x(t)|dt$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}c_x(t)\,dt$ converge absolument, donc converge.

36. Soit $a, x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x] \cup [x,a])$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

37. Soit $a, \lambda \in \mathbb{R}$. D'après la formule précédente appliquée à $f = \sin \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $x = \lambda + a$, on a

$$\sin(\lambda + a) = \sin a + \lambda \cos a - \int_a^{a+\lambda} (\lambda + a - t)\sin(t)\,dt.$$

On a alors, pour $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|\sin(\lambda+a) - \sin a - \lambda\cos a| &= \left| - \int_a^{a+\lambda} (a+\lambda-t)\sin(t)\,dt \right| \quad \leq \int_a^{a+\lambda} |(a+\lambda-t)\sin(t)|dt \\
&\leq \int_a^{a+\lambda} |a+\lambda-t|dt = \int_a^{a+\lambda} (a+\lambda-t)\,dt \underset{s=a+\lambda-t}{=\!=\!=} -\int_\lambda^0 s\ ds \\
&\leq \int_0^\lambda s\ ds = \frac{\lambda^2}{2}
\end{aligned}$$

Si $\lambda \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}
|\sin(\lambda+a) - \sin a - \lambda\cos a| &= \left| - \int_a^{a+\lambda} (a+\lambda-t)\sin(t)\,dt \right| \quad \leq \int_{a+\lambda}^{a} |(a+\lambda-t)\sin(t)|dt \\
&\leq \int_{a+\lambda}^{a} |a+\lambda-t|dt = \int_{a+\lambda}^{a} (t-a-\lambda)\,dt \underset{s=t-a-\lambda}{=\!=\!=} \int_0^{-\lambda} s\ ds = \frac{\lambda^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien montré que

$$|\sin(\lambda+a) - \sin a - \lambda\cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

38. Soit $x, h \in \mathbb{R}$. Remarquons que les intégrales $S(x+h)$, $S(x)$ et $C(x)$ sont toutes absolument convergentes, ce qui justifiera l'inégalité triangulaire par la suite. On a, par linéarité de l'intégrale généralisée,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &= \left| \frac{\int_0^{+\infty} \sin((x+h)t)\,e^{-t^2}dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt)\,e^{-t^2}dt}{h} - \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,e^{-t^2}dt \right| \\
&= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(xt+ht) - \sin(xt)}{h} - t\cos(xt) \right) e^{-t^2}dt \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(xt+ht) - \sin(xt) - th\cos(xt)}{h} \right| e^{-t^2}dt
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en appliquant la formule de la question 37 avec $a = xh$ et $\lambda = th$, on a

$$|\sin(xt+ht) - \sin(xt) - th\cos(xt)| \leq \frac{h^2t^2}{2}.$$

D'où

$$0 \leq \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \frac{h^2t^2}{2} e^{-t^2}dt = \frac{h}{4} I_2.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{4} I_2 = 0$ donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| = 0$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

39. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction S. Par définition, S est donc dérivable en x et on a $S'(x) = C(x)$. Ainsi S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $S' = C$.

40. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions $t \mapsto \cos(xt)$ et $t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, y]$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^y t\cos(xt)\, e^{-t^2} dt = \left[-\cos(xt)\,\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^y - \int_0^y \frac{x}{2}\sin(xt)\, e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{\cos(xy)\, e^{-y^2}}{2} - \frac{x}{2}\int_0^y \sin(xt)\, e^{-t^2} dt$$

Or

$$\left|\frac{\cos(xy)\, e^{-y^2}}{2}\right| \leq \frac{e^{-y^2}}{2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\cos(xy)\, e^{-y^2}}{2} = 0$. Donc en passant à la limite quand $y \to +\infty$ dans l'égalité obtenue, on a

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

41. D'après les questions 39 et 41, la fonction S vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

Donc S est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = \frac{1}{2}. \tag{E}$$

42. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, non-homogène et à coefficients non-constants. Résolvons d'abord l'équation différentielle homogène associée :

$$y' + \frac{x}{2}y = 0. \tag{E_0}$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$, donc l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(E_0) = \left\{x \mapsto Ce^{-x^2/4} / C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On va maintenant trouver une solution particulière de (E) par variation de la constante. Soit $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et posons $y : x \mapsto C(x)\, e^{-x^2/4}$. Alors $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-x^2/4} - \frac{x}{2}C(x)\, e^{-x^2/4}.$$

Alors

$$y \in \mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(E) \iff y'(x) + \frac{x}{2}y(x) = \frac{1}{2} \iff C'(x)\, e^{-x^2/4} = \frac{1}{2} \iff C'(x) = \frac{1}{2}e^{x^2/4}.$$

Or d'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2/4}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt$.

La fonction $y_p : x \mapsto e^{-x^2/4} \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt$ est alors une solution particulière de (E), et donc

$$\mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{x \mapsto Ce^{-x^2/4} + e^{-x^2/4}\int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt / C \in \mathbb{R}\right\}.$$

D'après la question précédente, $S \in \mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(E)$ donc il existe $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = Ce^{-x^2/4} + e^{-x^2/4}\int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt.$$

En évaluant l'égalité précédente en $x = 0$, on a alors

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0 \times t)\, e^{-t^2} dt = 0 = C + 0.$$

Donc $C = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = e^{-x^2/4}\int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt.$$