CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

(Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre)

Partie I - Préliminaires

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodiques.
Soit k un élément de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions :

$$\begin{array}{rcccl} f_k & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cos(kx) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} g_k & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(kx) \end{array}$$

On pose $C_k = Vect(f_k)$ et $S_k = Vect(g_k)$.

Q1. Montrer que C_k et S_k sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.

Soient (f, g) des éléments de E^2, on définit : $\varphi(f, g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Q2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On munit pour la suite l'espace vectoriel E du produit scalaire φ.

Q3. Calculer la norme de f_k et en déduire une base orthonormée de C_k.

Q4. Soit f un élément E, donner l'expression de la projection orthogonale de f sur C_k.

Q5. Soient f un élément de E et k un élément $\mathbb{N}$, exprimer $\varphi(f, f_k)$ en fonction des coefficients de Fourier de f.

Q6. Soit f un élément de E, donner le lien entre la projection de f sur C_k et les coefficients de Fourier de f.

Partie II - Série de Fourier

Soit f la fonction définie pour tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |\sin(2x)|$.

Q7. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

Q8. Étudier f sur un domaine le plus restreint possible. Donner la représentation graphique de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Q9. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

Q10. Linéariser $\sin(2x)\cos(4nx)$.

Q11. Montrer que pour tout élément n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(4nx)dx = \frac{-1}{4n^2-1}$.

Q12. Donner les coefficients de Fourier de f.

Q13. En utilisant le développement de Fourier de f pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}$.

PROBLÈME 2

Partie I - Exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+3y, 3x+y)$.

Q14. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + Id)$.

Q15. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Partie II - Cas général

Dans cette **partie**, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + Id)$.

Q16. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f.

Q17. Justifier que $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + \dfrac{1}{2}Id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Q18. Montrer que : $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \dfrac{1}{2}Id_E)$.

Q19. Calculer $(f + \dfrac{1}{2}Id_E) \circ (f - Id_E)$. En déduire que $\ker(f + \dfrac{1}{2}Id_E) = \mathrm{Im}(f - Id_{\mathrm{E}})$.

Q20. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et Id_E.

Q21. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que : $f^n = a_n f + b_n Id_E$.
Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbb{N}$.

Q22. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{2} + \dfrac{a_n}{2}$. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour n élément de $\mathbb{N}$.

Q23. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n) de termes général a_n respectivement b_n.

PROBLÈME 3

Partie I - Préliminaires

Q24. Justifier que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Q25. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q26. En déduire que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q27. En déduire que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.

Pour la suite, on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

Q28. Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

Q29. Montrer que pour tout p élément de $\mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Q30. Montrer que pour tout p appartenant à $\mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

Partie II - Recherche des extrema

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)^2 (t - y)^2 e^{-t^2} dt$.

Q31. Montrer que pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

Q32. Calculer les dérivées partielles premières de F et en déduire les trois points critiques de F.

Q33. Calculer pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $F(x, x) - F(0, 0)$ et $F(x, -x) - F(0, 0)$.

Q34. Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local ?

Partie III - Intégrale dépendant d'un paramètre

Q35. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent.

Pour la suite, on note $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$ et $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}dt$.

Q36. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral sans oublier les hypothèses.

Q37. En appliquant la formule précédente à la fonction sin, montrer que pour tout (λ, a) éléments de $\mathbb{R}^2$, $|\sin(\lambda + a) - \sin(a) - \lambda\cos(a)| \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

Q38. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0$.

Q39. En déduire que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Q40. Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$ (on pourra effectuer une intégration par partie).

Q41. Donner une équation différentielle dont S est solution sur $\mathbb{R}$.

Q42. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}dt$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1170 – D'après documents fournis