CORRIGE

I Etude des torseurs

I.A - L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

I.A.1) Soit A et $B \in \mathcal{E}$:
$\mathcal{M}(B) = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v} \wedge \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AB}$
L'application $\mathcal{M}$ est bien un torseur.

I.A.2) L'ensemble des torseurs est non vide d'après la question précédente.
Soit T_1 et T_2 deux torseurs, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe donc deux vecteurs $\overrightarrow{r}_1$ et $\overrightarrow{r}_2$ "associés" respectivement à T_1 et T_2.
Soit A et $B \in \mathcal{E}$: $(\lambda T_1 + T_2)(B) = \lambda T_1(B) + T_2(B) = \lambda\left(T_1(A) + \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right) + T_2(A) + \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{AB}$
$= (\lambda T_1 + T_2)(A) + \left(\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}\right) \wedge \overrightarrow{AB}$
Ainsi, l'application $\lambda T_1 + T_2$ est un torseur et par conséquent $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$.

I.A.3)a) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

I.A.3)b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. Soit $\overrightarrow{r_1}$ et$\overrightarrow{r_2}$ deux vecteurs "associés" à $\mathcal{M}$.
On considère trois point A, B et C non alignés de $\mathcal{E}$.
On a donc $M(B) = M(A) + \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{AB} = M(A) + \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{AB}$ donc $\left(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
D'après la question précédente, le vecteur $\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
On montre de même que le vecteur $\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ est donc colinéaire à deux vecteurs de $\mathcal{E}$ eux-même non colinéaires : c'est le vecteur nul.
Ainsi, $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$ ce qui prouve que le vecteur $\overrightarrow{r}$ de la définition est unique.

I.A.4) Soit $\overrightarrow{u} \in \mathcal{E}$.
On considère l'application $\mathcal{M}$ constante, qui à tout point $A \in \mathcal{E}$ associe $\overrightarrow{u}$.
Soit A et $B \in \mathcal{E}$: $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{0} \wedge AB$ donc l'application $\mathcal{M}$ est un torseur, de résultante (unique d'après la question précédente) le vecteur nul.

L'ensemble des couples est bien entendu non vide.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) deux couples. Il existe donc un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ (resp.$\overrightarrow{u_2}$), image de tout point de $\mathcal{E}$.
Soit $A \in \mathcal{E}$: $(\lambda\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)(A) = \lambda\mathcal{M}_1(A) + \mathcal{M}_2(A) = \lambda\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ donc l'application $\lambda\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ est un torseur constant : c'est un couple et par conséquent l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.

Soit $F : \begin{cases} \mathcal{C} & \rightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{E} & \mapsto & \mathcal{M}(O) \end{cases}$
Soit C_1 et $C_2 \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $F(\lambda C_1 + C_2) = (\lambda C_1 + C_2)(O) = \lambda C_1(O) + C_2(O) = \lambda F(C_1) + F(C_2)$ donc l'application F est linéaire.
L'application F est de toute évidence surjective.
Soit C un couple tel que $F(C) = \overrightarrow{0}$: on a donc $C(O) = \overrightarrow{0}$ et comme C est un couple $C(M) = \overrightarrow{0}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$ donc C est le couple nul et F est donc injective.
F est donc un isomorphisme.

Ainsi, $\dim\mathcal{C} = \dim\overrightarrow{\mathcal{E}} = 3$.

I.A.5)a) Soit A_0 et A_1 les points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{O_1A_1} = \overrightarrow{r}$.
On alors $g_0(A_0) = g_1(A_1) = \overrightarrow{0}$ donc g_0 et g_1 sont des glisseurs.
Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $\left(g_0 - g_1\right)(A) = \overrightarrow{0}$: on a alors $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{0}$ soit $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{0}$ ce qui implique que $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{O_1O}$ sont colinéaires : ainsi l'application $g_0 - g_1$ ne s'annule pas et n'est pas un glisseur.
On a trouvé une combinaison linéaire $g_0 - g_1$ de vecteurs de $\mathscr{G}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{G}$ donc l'ensemble $\mathscr{G}$ des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{T}$.

I.A.5)b) L'ensemble $\mathscr{G}_0$ des glisseurs s'annulant en O n'est pas vide puisqu'il contient l'application g_0 définie à la question précédente.
Soit G_1 et G_2 deux glisseurs de $\mathscr{G}_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$\lambda G_1 + G_2$ est un torseur et il est évident qu'il s'annule en O donc $\lambda G_1 + G_2 \in \mathscr{G}_0$ qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{T}$.

Soit $F : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{G}_0 & \to & \overrightarrow{\mathscr{E}} \\ \mathscr{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}\right.$: F est la restriction de l'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{T} & \to & \overrightarrow{\mathscr{E}} \\ \mathscr{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}\right.$ (définie à la question **I.A.3)b)**) donc F est linéaire.
Soit $\overrightarrow{r} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$: l'application $A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ est un torseur qui s'annule en O donc c'est un glisseur de $\mathscr{G}_0$ et F est surjective.
Soit $\mathscr{M} \in \mathscr{G}_0$ un glisseur de résultante nulle : un raisonnement identique à celui de la question **I.A.4)** prouve que $\mathscr{M}$ est le glisseur nul donc F est injective.
F est donc un isomorphisme.

Ainsi, $\dim \mathscr{G}_0 = \dim \overrightarrow{\mathscr{E}} = 3$.

I.A.5)c) Soit $\mathscr{M}$ un torseur de $\mathscr{T}$, de résultante $\overrightarrow{r}$: pour tout point A de $\mathscr{E}$, on a donc :
$\mathscr{M}(A) = \mathscr{M}(O) + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ donc $\mathscr{M}$ est la somme d'une application constante (qui à tout point A associe $\mathscr{M}(O)$) et d'un élément de $\mathscr{G}_0$: on a $\mathscr{T} = \mathscr{C} + \mathscr{G}_0$.
Soit $\mathscr{M}$ un torseur constant qui s'annule en O : $\mathscr{M}$ est donc le torseur nul et $\mathscr{C} \cap \mathscr{G}_0 = \emptyset$.
Ainsi, on a bien $\mathscr{T} = \mathscr{C} \oplus \mathscr{G}_0$ et donc $\dim \mathscr{T}$ =$\dim \mathscr{C}$+ $\dim \mathscr{G}_0$=6.

I.B - Equiprojectivité

I.B.1) Soit $\mathscr{M}$ un torseur de résultante $\overrightarrow{r}$ et A et B deux points de $\mathscr{E}$:
$\mathscr{M}(A).\overrightarrow{AB} = \left(\mathscr{M}(B) + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{AB} = \mathscr{M}(B).\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$.
Or, $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{BA}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ et par conséquent $\mathscr{M}(A).\overrightarrow{AB} = \mathscr{M}(B).\overrightarrow{AB}$

I.B.2)a) Une matrice antisymétrique est une matrice A telle que ${}^tA = -A$.

I.B.2)b) Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ -x+3z \\ -2x-3y \end{pmatrix} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I.B.3)a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ et λ et μ deux réels.
On veut montrer que $f\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{v}\right)$.
Comme le suggère l'énoncé, considérons le vecteur $\overrightarrow{w} = f\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right) - \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) - \mu f\left(\overrightarrow{v}\right)$ et un vecteur $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$.
$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{x} = \left[f\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right) - \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) - \mu f\left(\overrightarrow{v}\right)\right].\overrightarrow{x} = f\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{x} - \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{x} - \mu f\left(\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{x}$
$= -\left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\right).f\left(\overrightarrow{x}\right) - \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{x} - \mu f\left(\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{x}$
$= -\lambda\left(\overrightarrow{u}.f\left(\overrightarrow{x}\right) + f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{x}\right) - \mu\left(\overrightarrow{v}.f\left(\overrightarrow{x}\right) + f\left(\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{x}\right) = 0$
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ donc c'est le vecteur nul et par conséquence, f est linéaire.

I.B.3)b) Soit $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
Le coefficient a_{ij} représente la composante du vecteur $f\left(\overrightarrow{e_j}\right)$ selon le vecteur $\overrightarrow{e_i}$. On a donc $a_{ij}=f\left(\overrightarrow{e_j}\right).\overrightarrow{e_i}=-f\left(\overrightarrow{e_i}\right).\overrightarrow{e_j}=-a_{ji}$.
Ainsi, on a ${}^tA=-A$ donc A est une matrice antisymétrique.

I.B.3)c) Soit A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$: on a donc$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\overrightarrow{\mathscr{E}}:f\left(\overrightarrow{u}\right)=\begin{pmatrix} a_{12}y+a_{13}z \\ -a_{12}x+a_{23}z \\ -a_{13}x-a_{23}y \end{pmatrix}=\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{pmatrix}$.

I.B.4) Soit $\mathscr{M}$ une application de $\mathscr{E}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ vérifiant la propriété d'équiprojectivité.
On considère l'application $f:\overrightarrow{\mathscr{E}}\to\overrightarrow{\mathscr{E}}$ définie par $f\left(\overrightarrow{u}\right)=\mathscr{M}\left(O'\right)-\mathscr{M}\left(O\right)$ où O' est le point tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OO'}$.
Il s'agit ici de montrer que cette fonction f vérifie la propriété étudiée en **I.B.3)**.
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, et soit P le point tel que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OP}$.
On a alors $f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}=\left[\mathscr{M}\left(O'\right)-\mathscr{M}(O)\right].\overrightarrow{OP}=\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{OP}-\mathscr{M}\left(O\right).\overrightarrow{OP}$.
$=\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{OO'}+\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{O'P}-\mathscr{M}\left(O\right).\overrightarrow{OO'}-\mathscr{M}\left(O\right).\overrightarrow{O'P}$.
Or, $\mathscr{M}$ vérifie la propriété d'équiprojectivité donc $\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{OO'}=\mathscr{M}\left(O\right).\overrightarrow{OO'}$ donc
$f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}=\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{O'P}-\mathscr{M}\left(O\right).\overrightarrow{O'P}$.
De même, on montre que $\overrightarrow{u}.f\left(\overrightarrow{v}\right)=\mathscr{M}(O).\overrightarrow{O'P}-\mathscr{M}(P).\overrightarrow{O'P}$.
On a donc $f\left(\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.f\left(\overrightarrow{v}\right)=\mathscr{M}\left(O'\right).\overrightarrow{O'P}-\mathscr{M}(P).\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{0}$ puisque $\mathscr{M}$ vérifie la propriété d'équiprojectivité.
Ainsi, f vérifie la propriété étudiée en **I.B.3)** donc il existe un vecteur $\overrightarrow{r}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, on ait $f\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{u}$.
On a donc, pour tout point O' de $\mathscr{E}$, $\mathscr{M}(O')=\mathscr{M}(O)+\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{OO'}$ et donc $\mathscr{M}$ est un torseur d'après la question **I.A.5)c)**.

II Produits infinis

II.A - Définitions et premières propriétés

II.A.1)a) Soit $n\geq 2: 1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$.
Pour $N\geq 2$, on a donc $P_N=\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{N-1}{N-2}\times\frac{N-1}{N}=\frac{1}{N}$
Ainsi, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}P_N=0$ donc le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge.

II.A.1)b) Soit $n\geq 2: 1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$.
Pour $N\geq 2$, on a donc $P_N=\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\right)\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}\right)$
$\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\frac{3}{2}\times 43\times\ldots\times\frac{N}{N-1}\times\frac{N+1}{N}=\frac{N+1}{2}$
$P_N=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{N+1}{2}=\dfrac{N+1}{2N}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}P_N=\frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

II.A.2)a) Supposons qu'il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n = 0$. On a alors : $\forall N \geq n, P_N = 0$ et le produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

II.A.2)b) On suppose que le produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Soit $N \geq n_0$. On remarque que $\dfrac{P_{N+1}}{P_N} = \dfrac{\prod\limits_{n=n_0}^{N+1} u_n}{\prod\limits_{n=n_0}^{N} u_n} = u_{N+1}$.

$\lim\limits_{N\to+\infty} P_{N+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} P_N = \ell$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{P_{N+1}}{P_N} = 1$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N = 1$.

II.A.2)c) Cette condition n'est pas suffisante comme le prouve le contre-exemple étudié à la question **II.A.1)a)**.

II.A.3)a) Soit $N \geq n_0$. La suite u_n est à termes strictement positifs donc $P_N > 0$.
On a $\ln(P_N) = \ln\left(\prod\limits_{n=n_0}^{N} u_n\right) = \sum\limits_{n=n_0}^{N} \ln u_n$.
Supposons que P_N converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors, la fonction ln étant continue sur $\mathbb{R}^*$, $\ln(P_N)$ converge vers $\ln(\ell)$ donc la série de terme général $\ln(u_n)$ converge vers $\ln(\ell)$.

Réciproquement, supposons que la série de terme général $\ln(u_n)$ converge vers $K \in \mathbb{R}$ alors, la fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, $\exp\left[\sum\limits_{n\geq n_0} \ln u_n\right]$ converge vers $\exp K$, donc le produit infini de terme général u_n converge vers $\exp K$.
On a bien montré l'équivalence, et dans ce cas on a $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(u_n) = \ln\left(\prod\limits_{n\geq n_0} u_n\right)$.

II.A.3)b) On suppose que pour tout $n \geq n_0, u_n > 0$ donc $\ln(1-u_n)$ existe.
D'après la question précédente, le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0}$ converge si et seulement si la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge.
Or,on a $\ln(1-u_n) \underset{+\infty}{\sim} -u_n$ donc la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

II.A.3)c) En utilisant la question précédente, $\prod\limits_{n\geq 1}(1-q^n)$ est de même nature que la série de terme général q^n qui est une série convergente.

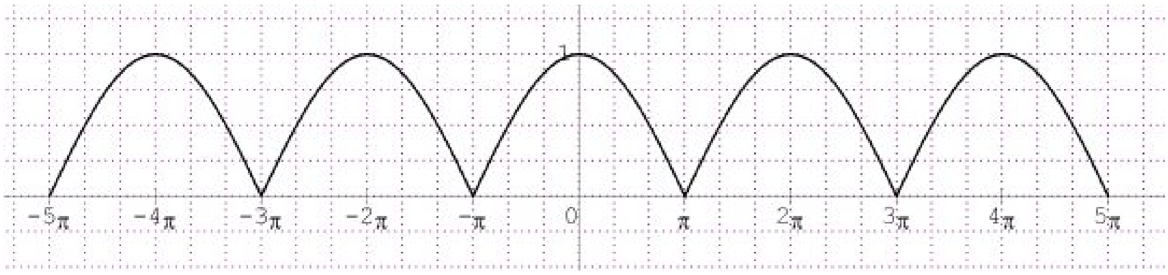
II.B - Développement en produit infini de $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

II.B.1) Les deux fonctions dont on veut démontrer l'égalité sont impaires donc si cette égalité est vérifiée pour $x \in]0,1[$ elle est vérifiée pour $-x$.

II.B.2) En utilisant la question **II.A.3)b)**, le produit infini $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^2}{n^2}$.
On sait que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^2}{n^2}$ est convergente, ainsi que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

II.B.3)a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc on a bien :
$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

II.B.3)b)



Il est évident que f est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
Il suffit de prouver que f est continue en π par périodicité.
$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \cos(\pi x) = f(\pi)$.
$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x-2\pi) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) = \cos(-x\pi) = f(\pi)$.
f est continue en π donc sur $\mathbb{R}$.

f est clairement de classe C^1 sur tout intervalle du type $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

f est paire donc $b_n = 0$ pour tout entier n.

$a_0 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(xt)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(xt)}{x}\right]_0^\pi = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Soit $n \geq 1$, on a $a_n = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(xt)\cos(nt)\mathrm{d}t$.
On utilise la question **II.B.3)a)** : $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos((x+n)t) + \cos(x-n)t))\,\mathrm{d}t$
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin((x+n)t)}{x+n} + \dfrac{\sin((x-n)t)}{x-n}\right]_0^\pi = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} + \dfrac{\sin((x-n)\pi)}{x-n}\right)$.
Si n est pair, on a $\sin(x\pi + n\pi) = \sin(x\pi - n\pi) = \sin(x\pi)$.
Si n est impair, on a $\sin(x\pi + n\pi) = \sin(x\pi - n\pi) = -\sin(x\pi)$
Finalement, $\sin((x+n)\pi) = (-1)^n \sin(x\pi)$ et $\sin((x-n)\pi) = (-1)^n \sin(x\pi)$.
On a donc $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\pi}\left(\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}\right) = \dfrac{2x \times (-1)^n}{\pi} \times \dfrac{\sin(x\pi)}{x^2 - n^2}$

II.B.3)c) f est $2\pi-$ périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$: elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Dirichlet :
$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\big)$.
Or, on a $\omega = 1$, l'égalité étant vraie sur $\mathbb{R}$ elle est vraie sur $[-\pi, \pi]$ et on a donc :

$$\cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}\cos(nt)\right)$$

II.B.3)d) On applique l'égalité précédente à $t = \pi$: on a donc
$\cos(\pi x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2}\cos(n\pi)\right)$.
On a $\cos(n\pi) = (-1)^n$ donc $\cos(\pi x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2}\right)$

Comme $\sin(\pi x) \neq 0$, on divise l'égalité précédente par $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ et on trouve :

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

II.B.4)a) On a $u\cos u - \sin u \underset{0}{=} u\left(1-\dfrac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)\right) - \left(u-\dfrac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\right) \underset{0}{=} -\dfrac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$.

$\pi\cot(\pi t) - \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi t\cos(\pi t)-\sin(\pi t)}{t\sin(\pi t)} \underset{0}{=} \dfrac{-(\pi t)^3/3+o\left(t^3\right)}{\pi t^2+o\left(t^2\right)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{\pi^2 t}{3}$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left(\pi\cos(\pi t)-\dfrac{1}{t}\right) = 0$.

La fonction $t \mapsto \pi\cot(\pi t) - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale I, impropre en 0, est convergente.

II.B.4)b) $\dfrac{\sin u}{u} \underset{0}{=} \dfrac{u-\dfrac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)}{u} \underset{0}{=} 1-\dfrac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)$ donc $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$.

On a donc $\ln\left(\dfrac{\sin u}{u}\right) = \ln\left(1+(\dfrac{\sin u}{u}-1)\right) \underset{0}{=} \dfrac{\sin u}{u}-1+o\left(u^2\right) \underset{0}{=} -\dfrac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)$

$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon}\right) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} -\dfrac{(\pi\epsilon)^2}{6}+o\left(\epsilon^2\right) = 0$

II.B.4)c) Soit $\epsilon > 0$: on a $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_\epsilon^x \pi\cot(\pi t)-\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Comme le suggère l'énoncé, on dérive la fonction $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)$, et on trouve $\pi\cot(\pi t)-\dfrac{1}{t}$.

On a donc $I = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left[\ln\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)\right]_\epsilon^x$

Donc $I = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \lim\limits_{\epsilon\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon}\right) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ d'après la question précédente.

II.B.4)d) Soit $t \in [0,1]$. Pour $n \geq 2$, $n^2-t^2 \neq 0$ donc $\dfrac{2t}{n^2-t^2}$ existe.

Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{2t}{n^2-t^2} > 0$ donc on peut appliquer les critères sur les séries à termes positifs.

$\dfrac{2t}{n^2-t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{n^2}$, terme général d'une série de même nature que la série de Riemann convergente de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.

Finalement, la série de terme général $\dfrac{2t}{n^2-t^2}$ converge et la quantité $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2t}{n^2-t^2}$ est définie.

II.B.4)e) On applique la question précédente avec $t = 1$: la série de terme général $\dfrac{2}{n^2-1}$ est convergente, la quantité $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1}$ est le reste d'ordre N de cette série donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1} = 0$.

II.B.4)f) Soit $t \in [0,1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N+1$:
On a $0 < n^2-1 \leq n^2-t^2$ donc $0 \leq \dfrac{1}{n^2-t^2} \leq \dfrac{1}{n^2-1}$.
On a aussi $0 \leq 2t \leq 2$ donc $0 \leq \dfrac{2t}{n^2-t^2} \leq \dfrac{2}{n^2-1}$.

$$\forall t \in [0,1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

II.B.4)g) On a $I = \displaystyle\int_0^x \pi\cot(\pi t) - \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t$ d'après la question **II.B.3)d)**.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$: on a donc $I = \displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{N} \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t$.
Soit $I - \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t$
D'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$ donc, en utilisant l'inégalité de la moyenne :
$\displaystyle\left|\int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left|\frac{2t}{t^2-n^2}\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}\mathrm{d}t = x\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$.
Finalement, comme $I = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ d'après la question **II.B.4)c)**, on a :

$$\left|\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^{N}\int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t\right| \leq x\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

II.B.4)h) D'après la question **II.B.4)e)**, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = 0$ donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t$ converge vers $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ d'après la question précédente.
Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t}{t^2-n^2}$ sur $[0,x]$ est $\ln\left(n^2-t^2\right)$ donc $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)$.
On a donc $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)$.
D'après la question **II.A.3)a)**, le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)$ converge donc vers $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ et finalement :

$$\sin(\pi x) = \pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right) = \pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

II.B.5)a)i) On sait que la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2}$ converge donc d'après la question **II.A.3)b)** le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge.

II.B.5)a)ii) A l'aide de la formule établie à la question **II.B.4)h)** et pour $x = \dfrac{1}{2}$, on trouve :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

II.B.5)b)i) Pour $a > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente donc ζ est définie sur $]1, +\infty[$.

II.B.5)b)ii) $\sin(\pi x) \underset{0}{=} \pi x - \dfrac{\pi^3 x^3}{6} + o\left(x^3\right)$.

II.B.5)b)iii) Le terme de degré 3 du développement limité de $\sin(\pi x)$ en 0 est $-\dfrac{\pi^3}{6}$.
On utilise le développement en produit infini de $\sin(\pi x)$ établi à la question **II.B.4)h)** :
$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$
$\sin(\pi x) = \pi x \left(1 - \dfrac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{4^2}\right)\ldots$
On voit que l'on obtient un terme de degré 3 de ce produit infini en multipliant πx par une infinité de 1 et par un facteur en x^2 de ce produit :
Ce terme en x^3 est $\pi x \left(-\dfrac{x^2}{1^2} - \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{x^2}{4^2} \ldots\right)$.
Ce terme en x^3 est donc $-\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} x^3$, c'est-à-dire $-\zeta(2) x^3$.
On identifie ces termes en x^3 :
$-\dfrac{\pi^3}{6} = -\pi\zeta(2)$ donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.