I Série et probabilités

Q 1. $\dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \dfrac{(n+1)!k!(n-k)!}{n!k!(n+1-k)!} = \dfrac{n+1}{n+1-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+1}{n+1} = 1\,;$

on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = 1$; ce qui prouve bien : $\boxed{\binom{n+1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \binom{n}{k}}$

Q 2. On pose $u_n = \binom{n}{k} x^n$; $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{\binom{n+1}{k}x^{n+1}}{\binom{n}{k}x^n}\right| = \dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$; d'après le théorème de d'Alembert sur les séries à termes positifs : $\begin{cases} \text{si } |x|<1, \text{ alors la série converge absolument} \\ \text{si } |x|>1, \text{ alors la série diverge grossièrement} \end{cases}$; donc, d'après le lemme d'Abel, on peut dire que $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série } \sum\limits_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n \text{ est } R=1}$

Q 3. $S_0 = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$; on reconnaît la série géométrique définie sur $]-1,1[$ et $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ S_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}}$

Q 4. D'après le théorème de dérivation terme à terme, S_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et $\forall x\in]-1,1[$,
on a $S_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; or $S_1(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1}\binom{n}{1}x^n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} nx^n = x\sum\limits_{k=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donc :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

Q 5. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \dfrac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \dfrac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

On a bien montré la formule du triangle de Pascal : $\boxed{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

Q 6. Le rayon de convergence de S_k est $R=1$; prenons donc $x\in]-1,1[$ et $k\leqslant n$.

$$S_{k+1}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^n \underset{m=n-1}{=} \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m+1}{k+1}x^{m+1} = x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m+1}{k+1}x^{m+1}$$

$$\underset{\text{d'après Q5}}{=} x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}\right)x^{m+1} = \underbrace{x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k}x^{m+1}}_{\text{on regroupe}} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^{m+1}$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}x^{m+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^{m+1} = x\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}x^m + x\sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^m$$

On a bien montré $\forall x\in]-1,1[$:

$$\boxed{S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x)}$$

Q 7. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété : $\forall x \in]-1,1[,\ S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

Initialisation : $S_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x}$; donc la propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain k ;

d'après la question précédente, on sait que $S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x) \iff S_{k+1}(x) = \dfrac{x}{1-x}S_k(x)$; donc, par hypothèse de récurrence, $S_{k+1}(x) = \dfrac{x}{1-x} \times \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$; ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\boxed{S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}}$

Q 8. La variable N est égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche. A chaque lancer la probabilité d'obtenir la face blanche est $\frac{1}{6}$. Donc $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{6}}$

Q 9. On sait que pour une variable N suivant une loi géométrique, les espérances $\mathrm{E}(N)$ et $\mathrm{E}\left(N^2\right)$ sont finies.

Ensuite $\frac{5}{6} \in]-1,1[$, donc $\frac{5}{6}$ appartient à l'ensemble de définition des fonction S_k.

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{5}S_1\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{5} \times \frac{5 \times 36}{1 \times 6} = 6$$

On retrouve le résultat du cours : $\boxed{\mathrm{E}(N) = \dfrac{1}{p} = 6}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(N) &= \mathrm{E}\left(N^2\right) - \left(\mathrm{E}(N)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(N=n) - 36 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(n-1)+n\right)\mathbb{P}(N=n) - 36 \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(N=n) + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) - 36 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + 6 - 36 \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 30 = \frac{2}{5}S_2\left(\frac{5}{6}\right) - 30 = \frac{2}{5} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^3} - 30 = \frac{2 \times 5^2 \times 6^3}{5 \times 6^2} - 30 = 60 - 30
\end{aligned}$$

On retrouve à nouveau le résultat du cours : $\boxed{\mathrm{V}(N) = \dfrac{1-p}{p^2} = 30}$

Q 10. $\mathbb{P}(N \leqslant n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}(N=k)\right) \underset{\text{par définition}}{=} \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N=k) = \dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \underset{\ell=k-1}{=} \dfrac{1}{6}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{\ell} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}$

Donc : $\boxed{\mathbb{P}(N \leqslant n) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$

Q 11. Si $n < k$, l'événement $\left((X=k)|(N=n)\right)$ est impossible, et donc dans ce cas $\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = 0$

Si $n \geqslant k$, la variable conditionnelle $X_{(N=n)}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$ et dans ce cas $\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-k}$; pour résumer :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } k > n \ : \ \mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = 0 \\ \text{si } k \leqslant n \ : \ \mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-k} \end{array}}$$

Q 12. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left((N=n)\cap(X=0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \underset{k=n-1}{=} \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^k = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{5}{36} \times \frac{36}{11}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{5}{11}}$

Tout d'abord $\frac{25}{36}$ appartient bien à l'ensemble de définition des fonctions S_k.

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}\big((N=n)\cap(X=k)\big)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{6}{5}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{25}{36}\right)^{n}=\frac{1}{5^{k+1}}S_k\left(\frac{25}{36}\right)$$
$$=\frac{1}{5^{k+1}}\times\frac{\left(\frac{25}{36}\right)^k}{\left(\frac{11}{36}\right)^{k+1}}=\frac{5^{2k}\times 36^{k+1}}{5^{k+1}\times 36^k\times 11^{k+1}}=\frac{5^k\times 36}{5\times 11\times 11^k};$$

on obtient bien, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{36}{55}\left(\dfrac{5}{11}\right)^k}$

Q 13. Tout d'abord $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

$$\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\frac{5}{11}+\frac{36}{55}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{11}\right)^k=\frac{5}{11}+\frac{36}{55}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{11}\right)^k-1\right)$$
$$=\frac{5}{11}+\frac{36}{55}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{11}}-1\right)=\frac{5}{11}+\frac{36}{55}\left(\frac{11}{6}-1\right)=\frac{5}{11}+\frac{36}{55}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{11}+\frac{6}{11}$$

On a bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)=1}$

Q 14. $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k\geqslant1}k\mathbb{P}(X=k)=\frac{36}{55}\sum_{k\geqslant1}k\left(\frac{5}{11}\right)^k$; or $\frac{5}{11}\in]-1,1[$, donc on reconnaît $S_1\left(\frac{5}{11}\right)$; ainsi X est d'espérance finie et $\mathrm{E}(X)=\dfrac{36}{55}S_1\left(\dfrac{5}{11}\right)=\dfrac{36}{55}\times\dfrac{\frac{5}{11}}{\left(\frac{6}{11}\right)^2}=\dfrac{36\times5\times11^2}{55\times11\times6^2}$; ce qui donne $\boxed{\mathrm{E}(X)=1}$

Q 15. D'après le théorème du transfert : $\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(X=k)$

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)=\frac{36}{55}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{5}{11}\right)^k=\frac{36\times2}{55}\sum_{k=2}^{+\infty}\binom{k}{2}\left(\frac{5}{11}\right)^k=\frac{36\times2}{55}S_2\left(\frac{5}{11}\right)$$
$$=\frac{36\times2}{55}\times\frac{\left(\frac{5}{11}\right)^2}{\left(\frac{6}{11}\right)^3}=\frac{36\times2\times5^2\times11^3}{55\times11^2\times6^3}=\frac{10}{6}$$
; ce qui donne : $\boxed{\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)=\dfrac{5}{3}}$

Q 16. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\big(X^2\big)-\big(\mathrm{E}(X)\big)^2=\mathrm{E}\big(X(X-1)+X\big)-1^2\underset{\text{linéarité de l'espérance}}{=}\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)+\mathrm{E}(X)-1=\dfrac{5}{3}+1-1$;

donc X admet une variance et $\boxed{\mathrm{V}(X)=\dfrac{5}{3}}$

II Séries de Fourier et équation de la chaleur

Q 17. Si F est paire, alors la fonction $t\mapsto F(t)\sin(n\pi t)$ est impaire, et alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{b_n(F)=\int_{-1}^{1}F(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t=0}$$

Preuve : Montrons que pour une fonction continue et impaire $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Par Chasles, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$; on effectue le changement de variable $x=-t$ dans la première intégrale, on a $\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$; il vient : $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{0}f(-x)(-\,\mathrm{d}x)+\int_{0}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$; soit :

$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme f est impaire : $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

De même, si F est impaire, alors la fonction $t \mapsto F(t)\cos(n\pi t)$ est impaire, et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n(F) = \int_{-1}^{1} F(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Q 18. Soit F une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et paire, alors on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(-x)$; en dérivant cette égalité, il vient : $F'(x) = -F'(-x)$; ce qui montre que $\boxed{F' \text{ est impaire}}$

De même, soit F une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et impaire, alors on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -F(-x)$; en dérivant cette égalité, il vient : $F'(x) = -\big(-F'(-x)\big) = F'(-x)$; ce qui montre que $\boxed{F' \text{ est paire}}$

Q 19. $a_0(F') = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big[F(t)\big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\big(F(1) - F(-1)\big)$, or F est 2−périodique, donc $F(-1) = F(1)$ et, finalement : $a_0(F') = 0$

$a_n(F') = \int_{-1}^{1} F'(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t$; on pose $\begin{array}{lll} u'(t) = F'(t) & \Rightarrow & u(t) = F(t) \\ v(t) = \cos(n\pi t) & \Rightarrow & v'(t) = -n\pi\sin(n\pi t) \end{array}$; par IPP, il vient :

$$\begin{aligned} a_n(F') &= \big[F(t)\cos(n\pi t)\big]_{-1}^{1} + n\pi\int_{-1}^{1} F(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = F(1)\cos(n\pi) - F(-1)\cos(-n\pi) + n\pi b_n(F) \\ &= \underbrace{F(1)\times(-1)^n - F(-1)\times(-1)^n}_{=0} + n\pi b_n(F) = n\pi b_n(F) \end{aligned}$$

$b_n(F') = \int_{-1}^{1} F'(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t$; on pose $\begin{array}{lll} u'(t) = F'(t) & \Rightarrow & u(t) = F(t) \\ v(t) = \sin(n\pi t) & \Rightarrow & v'(t) = n\pi\cos(n\pi t) \end{array}$;

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$, donc par IPP, il vient :

$$b_n(F') = \big[F(t)\sin(n\pi t)\big]_{-1}^{1} - n\pi\int_{-1}^{1} F(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{F(1)\sin(n\pi) - F(-1)\sin(-n\pi)}_{=0} - n\pi a_n(F) = -n\pi a_n(F)$$

Pour résumer, $\boxed{a_0(F') = 0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(F') = n\pi b_n(F) \text{ et } b_n(F') = -n\pi a_n(F)}$

Q 20. F est de classe $\mathscr{C}^1$, donc F' est continue ; d'après le théorème de Parseval, les séries $\sum\big(a_n(F')\big)^2$ et $\sum\big(b_n(F')\big)^2$ sont convergentes ; d'après la question précédente, on en déduit que les séries $\sum\big(n\pi n_n(F)\big)^2$ et $\sum\big(n\pi a_n(F)\big)^2$ sont convergentes ; c'est-à-dire que $\boxed{\text{les séries } \sum n^2\big(a_n(F)\big)^2 \text{ et } \sum n^2\big(b_n(F)\big)^2 \text{ sont convergentes}}$

Q 21. Comme F est impaire, alors F' est paire, puis $F"$ est impaire, et enfin $F^{(3)}$ est paire ; donc $b_n(F^{(3)}) = 0$.
$F^{(3)} = \big(F"\big)'$; $F"$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc d'après **Q19**, on a : $a_0(F^{(3)} = 0$.
Toujours d'après **Q9**, $a_n(F^{(3)}) = a_n\big((F")'\big) = n\pi b_n(F") = -n^2\pi^2 a_n(F') = -n^3\pi^3 b_n(F)$.
Conclusion : $\boxed{a_0(F^{(3)}) = 0\ ;\ \text{et},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(F^{(3)}) = -n^3\pi^3 b_n(F) \text{ et } b_n(F^{(3)}) = 0}$

Q 22. F est de classe $\mathscr{C}^3$, donc $F^{(3)}$ est continue et d'après le théorème de Parseval la série $\sum\big(a_n(F^{(3)})\big)^2$ converge, d'après la question précédente, on en déduit que la série $\sum\big(n^3\pi^3 b_n(F)\big)^2$ converge,
c'est-à-dire que $\boxed{\text{la série } \sum n^6\big(b_n(F)\big)^2 \text{ converge}}$

Q 23. $\big(|a| - |b|\big)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow |a|^2 - 2|a|\,|b| + |b|^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2|a|\,|b| \geqslant -a^2 - b^2 \Leftrightarrow |a|\,|b| \leqslant \frac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big)$.

On a bien montré : $\boxed{|a|\,|b| \leqslant \frac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big)}$

Q 24. On applique l'inégalité précédente avec $a = \frac{1}{n}$ et $b = n^3\big(b_n(F)\big)$; il vient donc :

$$\boxed{n^2|b_n(F)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + n^6\big(b_n(F)\big)^2\right)}$$

Q 25. D'après **Q22**, la série $\sum n^6\big(b_n(F)\big)^2$ est convergente ; de plus la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ; donc la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+n^6\big(b_n(F)\big)^2\right)$ est convergente.

D'après la question précédente, on a $n^2|b_n(F)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+n^6\big(b_n(F)\big)^2\right)$, donc par comparaison on peut dire que $\boxed{\text{la série } \sum n^2 b_n(F) \text{ est absolument convergente}}$

Q 26. Supposons l'existence de deux fonctions F et G impaires, $2-$périodiques et telles que $F(x)=G(x)=f(x)$, $\forall x\in[0,1]$.

Par construction, F et G coïncident sur $[0,1]$; soit $x\in[-1,0]$; comme F et G sont impaires, alors $F(x)=-F(-x)$ et $G(x)=-G(-x)$; or $-x\in[0,1]$, donc $F(-x)=G(-x)$ et par suite, $F(x)=G(x)$. Donc F et G coïncident sur $[-1,1]$, c'est-à-dire sur une période.

Dorénavant, soit $x\in\mathbb{R}$, comme F et G sont $2-$périodiques, on a $F\left(x-2\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor\right)=F(x)$ et $G\left(x-2\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor\right)=G(x)$; or $x-2\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor\in[-1,1[$, donc $F\left(x-2\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor\right)=G\left(x-2\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor\right)$, et par suite $F(x)=G(x)$.

On a montré que F et G coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc sont égales.

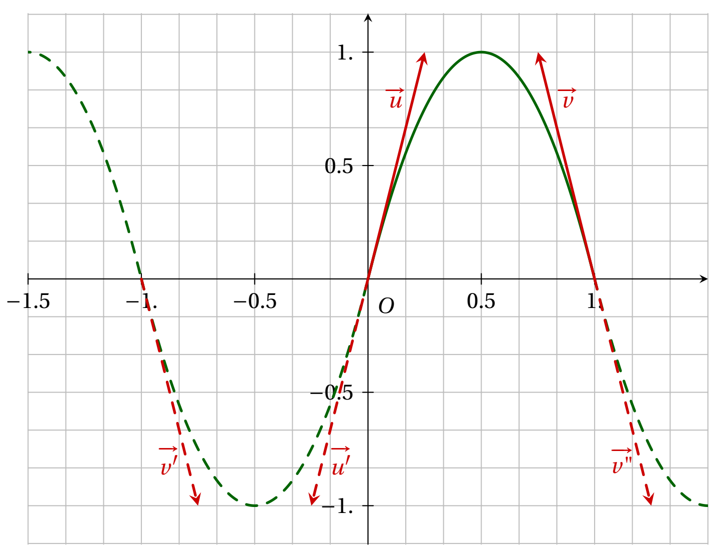
$\boxed{\text{Il existe donc une unique fonction } F \text{ impaire, } 2-\text{périodique et telle que } F(x)=f(x),\ \forall x\in[0,1]}$

Q 27. F et f coïncident sur $[0,1]$, donc la courbe de F sur $[0,1]$ est la même que celle de f.

A partir de la courbe de f définie sur $[0,1]$, on obtient la partie de courbe de F définie sur $[-1,0]$ par une symétrie de centre O. Ensuite, on obtient la totalité de la courbe de F par translations de vecteurs $2n\vec{i}$, avec $n\in\mathbb{Z}$.

Q 28. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. F admet une dérivée à droite en 0 et une dérivée à gauche en 1 ; appelons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs des tangentes respectives en 0_+ et en 1_-.

Considérons le dessin suivant pour illustrer la situation :



Par la symétrie de centre O le vecteur $\vec{u'}$ image de $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et tangent à la portion de courbe définie sur $[-1,0]$; donc la courbe de F admet une tangente au point d'abscisse 0, donc le cœfficient directeur est $f'(0)$.

De même, le vecteur $\vec{v'}$, image de $\vec{v}$ par la symétrie de centre O est colinéaire à $\vec{v}$ et tangent à la courbe de F définie sur $[-1,0]$, puis le vecteur $\vec{v"}$ image de $\vec{v'}$ par translation de vecteur $2\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{v'}$, donc à $\vec{v}$ et tangent à la courbe de F définie sur $[1,2]$. La courbe de F admet une tangente au point d'abscisse 1 de cœfficient directeur $f'(1)$.

De la même façon, on montre que la courbe de F admet une tangente au point d'abscisse -1 de cœfficient directeur $f'(1)$.

Q 29. D'après les conditions aux limites de la barre, les fonctions $h_0 : t\mapsto u(t,0)$ et $h_1 : t\mapsto u(t,1)$ sont constantes égales à 0 ; donc $\forall t\in[0,+\infty[$, $h_0'(t)=h_1'(t)=0$; c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t\in[0,+\infty[,\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,1)=0}$$

Q 30. D'après la condition initiale, $f(x) = u(0,x)$ donc $f"(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,x)$; en particulier $f"(0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0)$ et $f"(1) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,1)$.

Or u est solution de l'EDP (II.1) donc $\forall (t,x) \in \Delta$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$; en particulier, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,1) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,1)$; d'après la question précédente et en prenant $t = 0$, on a $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,1) = 0$.

On en déduit donc que $\boxed{f"(0) = f"(1) = 0}$

Q 31. Vérifions que la fonction f satisfait toutes les conditions de la partie **II.B** : f est de classe $\mathscr{C}^3$ donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$; $f(0) = u(0,0) = 0$ et $f(1) = u(0,1) = 0$, d'après les conditions aux limites ; les conditions de la question **Q25** sont vérifiées, donc il existe une unique fonction F impaire, 2−périodique et telle que $F(x) = f(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

Il reste à montrer que F est de classe $\mathscr{C}^3$. Tout d'abord f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0,1]$; ensuite $f(0) = f(1) = 0$ et, d'après la question précédente, $f"(0) = f"(1) = 0$. Toutes les conditions sont vérifiées pour affirmer que F est de classe $\mathscr{C}^3$.

Q 32. On applique le même raisonnement : g_t est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0,1]$; $g_t(0) = u(t,0) = 0$; $g_t(1) = u(t,1) = 0$; $g_t"(0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0$ et $g_t"(1) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,1) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0$; toutes les conditions sont réunies pour affirmer que g_t est prolongeable en une unique fonction G_t impaire, 2−périodique et de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Q 33. G_t est de classe $\mathscr{C}^3$, 2−périodique, donc d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de G_t converge et coïncide avec G_t en tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, G_t est impaire donc $a_n(G_t) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\boxed{\text{il existe une suite } \left(\beta_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ telle que } G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t)\sin(n\pi x)\,;\ \text{avec } \beta_n(t) = \int_{-1}^{1} G_t(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x}$$

Q 34. $\beta_n(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} G_0(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x$; avec G_0 l'unique fonction impaire, 2−périodique qui prolonge g_0.

Or $g_0 = f$, donc $G_0 = F$ et $\boxed{\beta_n(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = b_n(F)}$

Q 35. G_t est impaire et de classe $\mathscr{C}^3$, donc $G_t"$ est impaire et de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut à nouveau appliquer le théorème de Dirichlet : on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_t"(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(G_t")\sin(n\pi x)$.

D'après la partie **II.A**, on a $b_n(G_t") = -n\pi a_n(G_t') = -n^2\pi^2 b_n(G_t) = -n^2\pi^2\beta_n(t)$; donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_t"(x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\beta_n(t)\sin(n\pi x)}$$

Q 36. $\forall t \in [0,+\infty[$, G_t est la fonction qui prolonge g_t ; donc $\forall t \in [0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,1]$, on a :

$G_t(x) = g_t(x) = u(t,x)$; autrement dit $\forall (t,x) \in \Delta$, on a : $U(t,x) = u(t,x)$ et donc $\forall (t,x) \in \Delta$, $U(x,t)$ vérifie d'EDP (II.1.) ; ce qui donne $\forall (t,x) \in \Delta$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x)$ ✪

D'après l'énoncé, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t)\sin(n\pi x)$; et, comme $U(t,x) = G_t(x)$, on a :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) = G_t"(x) = -\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\beta_n(t)\sin(n\pi x)$$

L'égalité ✪ s'écrit donc : $\boxed{\forall (t,x) \in \Delta,\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t)\sin(n\pi x) = -\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\beta_n(t)\sin(n\pi x)}$

Q 37. Les solutions de l'équation différentielle $y'(t)+n^2\pi^2 y(t)$ sont définies par :

$$\boxed{y_n(t)=C_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}, \text{ avec } C_n\in\mathbb{R}}$$

Q 38. On sait que $\forall (t,x)\in\Delta$, on a : $u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n(t)\sin(n\pi x)$;

or β_n est solution du problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{l}\beta_n'(t)+n^2\pi^2\beta_n(t)=0\\ \beta_n(0)=b_n(F)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\\ \beta_n(0)=b_n(F)\end{array}\right.$

ce qui donne $C_n=b_n(F)$ et ainsi $\beta_n(t)=b_n(F)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}$; on en déduit que la solution cherchée est définie par :

$$\boxed{\forall (t,x)\in\Delta,\quad u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)}$$