

shipout/backgroundshipout/foreground

COURS PYTHON TSI1

SOMMAIRE

1 Variables, structured types and loops	1
Cours	3
2 Introduction to functions and procedures	19
Cours	21
3 Search for values. Counting	31
Cours	33
4 The bubble sort	47
Cours	49
5 Modules and library	53
Cours	55
6 Integer representation	65
Cours	67
7 Floating-point numbers	75
Cours	77
8 Analysis of an algorithm	87
Cours	89
9 Sorting recursionless	105
Cours	107
10 Algorithm of Gauss	117
Cours	119
11 Approximate integration	143
Cours	145
12 Pixels and images	149
Cours	151

Chapitre **1**

Variables, structured types and loops

■ Objectifs

Les incontournables :

- savoir nommer simplement et efficacement une variable et l'affecter ;
- utiliser **del x** pour désaffecter la variable **x** ;
- savoir reconnaître les types de base ;
- savoir utiliser les opérations **not**, **or**, **and** sur les booléens ;
- savoir utiliser les opérations classiques sur les entiers ou sur les flottants ;
- savoir écrire les comparaisons en code Python ;
- savoir écrire les différents types structurés : tuple, chaîne et liste ;
- savoir utiliser les opérations classiques communes à ces types structurés : concaténation, recherche d'un élément, extraction de tranche, répétition etc. ;
- savoir utiliser les opérations les plus classiques propres aux listes comme **append** ou la méthode **pop** qui permettent d'ajouter ou d'enlever des éléments à une liste ;
- savoir écrire une instruction conditionnelle avec **if**, **elif**, **else** ;
- savoir utiliser **range** pour créer un intervalle d'entiers ;
- savoir utiliser une boucle **for** ou une boucle **while** ;
- savoir utiliser l'instruction **break** ;
- savoir utiliser la fonction **print** ;
- savoir utiliser l'instruction **assert**.

Et plus si affinités :

- Connaître les affectations spécifiques à Python qui permettent l'incrémementation ;
- savoir écrire une succession croissante d'entiers avec un pas fixé et récupérer ou éliminer des éléments d'une liste avec un pas fixé ;
- savoir utiliser la fonction **id** ;
- savoir faire un dépaquage de tuples ;
- savoir utiliser les opérations des listes un peu plus exotiques : **sort**, **count**, **insert**, **sum**, **del**.

Cours

■ Variables et types

1. Un exemple d'affectation

Commençons par observer un exemple d'affectation :

```
In [1]: var1 = 6+7
In [2]: var1, id(var1), type(var1)

Out[2]: (13, 140707543005344, int)
```

On peut représenter la mémoire de Python en deux zones.

- La table des symboles, où sont stockés les noms des objets. À chaque nom d'objet est associé un type noté **type** et une adresse notée **id** dans la table des valeurs. L'adresse représente la position de l'objet, elle est repérée par un nombre ;
- La table des valeurs, où sont stockées les valeurs des objets. Ce stockage se fait sous forme binaire (suites de bits valant 0 ou 1).

Ainsi dans l'exemple précédent, la valeur stockée dans la table des valeurs pour **var1** est 1101. Plus précisément, Python procède en deux temps : d'abord il évalue $6 + 7$ puis il stocke le résultat obtenu donc 1101 dans la table des valeurs et note l'adresse utilisée. Enfin, il inscrit le nom **var1** dans la table des symboles en précisant le type et l'adresse associés.

Si l'on réaffecte notre variable **var1**, c'est-à-dire si l'on lui donne une autre valeur, l'adresse change. En fait, Python supprime le nom de la table des symboles puis le réinscrit, c'est une nouvelle adresse qui est créée.

```
In [4]: var1 = 47*2
In [5]: var1, id(var1)

Out[5]: (94, 140707543007936)
```

2. Les types principaux

Le mieux ce sont encore des exemples.

```
In [6]: var2 = 3.01
In [7]: var2, type(var2)

Out[7]: (3.01, float)

In [8]: var3 = complex(1,2)
In [9]: var3, type(var3)

Out[9]: ((1+2j), complex)
```

```

In [10]: var4 = (3<8)
In [11]: var4, type(var4)
Out[11]: (True, bool)
In [12]: var5 = (3>8)
In [13]: var5, type(var5)
Out[13]: (False, bool)
In [14]: var6 = "tout cela est trop simple "
In [15]: var6, type(var6)
Out[15]: ('tout cela est trop simple ', str)

```

Résumons donc les types rencontrés.

- Le type **int** pour les entiers relatifs stockés en valeur exacte ;
- Le type **float** pour les nombres à virgule flottante ;
- Le type **complex** pour les nombres complexes, retenir que **j** est le *i* des mathéux ;
- le type **bool** pour les booléens qui renvoie **True** ou **False** ;
- le type **str** pour les chaînes de caractères.

D'autres types existent, par exemple le type **dict** : C'est une liste non ordonnée d'objets délimitée par des accolades, appelée dictionnaire. Ce sera vu dans le chapitre 3 et surtout en TSI2.

Revenons aux booléens et les opérateurs associés : **not**, **or**, **and**

```

In [16]: var7 = not(3>=8)
In [17]: var7
Out[17]: True
In [18]: var8 = (4==8) or (4<8) ; var9 = (4==8) and (4<8)
In [19]: var8, var9
Out[19]: (True, False)

```

3. Les opérations classiques. On a commencé à en voir avec le dernier exemple. **a >= b** (respectivement **a <= b**) signifie que **a** est supérieur ou égal (respectivement inférieur ou égal) à **b**. Pour la comparaison, l'égalité entre **a** et **b** est **a == b** et pour signifier que **a** n'est pas égal à **b**, on écrit **a != b**. Le produit de **a** et **b** se tape **a*b** et **a** à la puissance **b** est **a ** b**. Notons que pour écrire une puissance de 10, on peut taper **1e - 7** et ce qui donne 10^{-7} . Puis **max(a,b)** (respectivement **min(a,b)**) renvoie le maximum (respectivement le minimum) entre **a** et **b**. Enfin la commande **int(a)** donne l'entier le plus proche de **a**.

4. L'instruction assert. Si l'on tape **assert p** où **p** est une proposition, l'exécution envoie un message d'erreur si **p** est fausse.

```

In [22]: assert 3 <= 5

In [23]: assert 5 <= 3
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-23-4b731aa5c1c2>", line 1, in <module>
    assert 5 <= 3
AssertionError

```

5. Nom des variables

Le nom d'une variable peut comprendre des lettres, des chiffres et le symbole `_`. Il ne doit pas commencer par un chiffre. Certains mots sont verboten car réservés au langage Python qui peut les utiliser. Par exemple `import`, `True`, `False` etc ou certaines fonctions.

```
In [23]: False = 2023
File "<ipython-input-23-1ab1d76c5f7b>", line 1
      False = 2023
      ^
SyntaxError: cannot assign to False
```

Notons enfin que Python fait la différence entre les majuscules et les minuscules. On peut ainsi noter une variable `false` mais il vaut mieux éviter ce genre de pirouette.

6. Affectation

La commande d'affectation est le symbole `=` comme on a vu plus haut. Attention donc, `a=8` signifie que l'on affecte la valeur 8 à `a` et `a==8` est une instruction booléenne de valeur `True` si 8 est affecté à `a` et de valeur `False` sinon.

```
In [24]: # affectations successives
In [25]: a = 5; b = 3*a
In [26]: a, b
Out[26]: (5, 15)
In [27]: # affectations simultanees
In [28]: a = b = -5
In [29]: a, b, id(a), id(b)
Out[29]: (-5, -5, 140707543004768, 140707543004768)

In [30]: # affectations paralleles
In [31]: a, b, c = 3, 4, 5
In [32]: c-a+b**2
Out[32]: 18
```

Dans le second cas, on voit que l'on a créé une seule variable et que les noms `a` et `b` renvoient tous les deux vers cette même variable.

7. Suppression d'une variable : On utilise la commande `del`

```
In [75]: x=1
In [76]: x, id(x)
Out[76]: (1, 140707954702112)

In [77]: del x
In [78]: x
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-78-6fcf9dfbd479>", line 1, in <module>
NameError: name 'x' is not defined
```

8. Affectations spécifiques à Python qui permettent l'incrémentat

- L'instruction `x += y` est équivalente à `x = x+y`;
- L'instruction `x -= y` est équivalente à `x = x-y`;
- L'instruction `x *= y` est équivalente à `x = x*y`;
- L'instruction `x **= y` est équivalente à `x = x**y` (mathématiquement x^y);
- L'instruction `x /= y` est équivalente à `x = x/y`;

■ Boucles simples

1. Plantons le décor

Un programme est composé d'une suite d'instructions, exécutées l'une après l'autre dans l'ordre où elles sont écrites, contenant des définitions de variables et de fonctions (on verra plus loin des fonctions usuelles), des affectations, des boucles (simples ou imbriquées), des instructions conditionnelles qui utilisent des expressions pouvant être des résultats d'appels de fonctions (l'aboutissement ce sont les fonctions récursives que l'on voit en TSI1 au printemps).

On distingue deux types de boucles (pour l'instant les boucles simples).

- les boucles conditionnelles

```
while condition :  
    instructions
```

- les boucles non conditionnelles

```
for elt in sequence:  
    instructions
```

Avec une boucle non conditionnelle, le bloc d'instructions est répété par exemple n fois si n est la longueur de la séquence. Cette séquence peut être une liste, un tuple, une chaîne de caractères). Nous verrons plus loin ce qu'est une liste ou un tuple en Python. La variable `elt` prend la valeur de l'un des n éléments de la séquence. Donnons un exemple.

```
In [9]: for i in range(4):  
    ...:     i=i+1  
In [10]: i  
Out[10]: 4  
# VARIANTE qui donne le meme resultat  
In [9]: for i in range(4): i=i+1
```

Avec le code qui suit qui utilise une boucle conditionnelle, on aboutit au même résultat.

```
In [11]: i=0  
In [12]: while i<4:  
    ...:     i=i+1  
In [13]: i  
Out[13]: 4
```


Comment choisir entre la boucle `for` et la boucle `while` ?

En général, si l'on connaît avant de démarrer la boucle le nombre d'itérations à exécuter, on choisit une boucle `for`. Au contraire, si la décision d'arrêter la boucle ne peut se faire que par un test, on choisit une boucle `while`. Nous verrons plus loin des exemples utilisant la boucle appropriée.

2. Quelques créations de boucles simples avec les entiers

- A) `range(n)` donne les entiers de 0 à $n - 1$.
- B) `range(a, b)` donne les entiers compris entre a (compris) et b (non compris).
- C) `range(a, b, p)` donne les entiers compris entre a et b avec un pas de p .
- D) `range(n, i, -1)` si $i < n$, donne les entiers de $i + 1$ à n dans l'ordre décroissant.
- E) `a // b` donne le quotient dans la division euclidienne de a par b .
Ainsi `a // n` renvoie $\lfloor \frac{a}{n} \rfloor$.
- F) `a % b` donne le reste dans la division euclidienne de a par b .
Ainsi `a % b == 0` signifie que a est un multiple de b .
- G) Pour écrire $S = \sum_{k=1}^n a_k$, on peut **utiliser une boucle**.

Par exemple, pour $n = 5$ et $a_k = k^2$, on tape :

```
S = 1 ** 2
for k in range(2,6) : S += k**2
S
```

Où alors on utilise la **fonction prédéfinie** `sum` et dans ce cas, on tape :

```
S = sum(k**2 for k in range(1,6)) ; S
```

Si les a_k sont directement donnés sous forme d'une liste `L` comme on verra plus loin, la commande `sum(L)` donne `S`

H) Pour la factorielle de n qui est $n!$, il y a deux méthodes.

1. Quand on aura vu les modules principaux plus loin, on tapera `from math import factorial` puis on tapera `factorial(n)`

2. On peut **utiliser une boucle**. Par exemple, pour $n = 5$, on tape :

```
P = 1
for k in range(2,6) : P *= k
P
```

On obtient $5! = 120$.

I. De façon générale, pour écrire $P = \prod_{k=1}^n a_k$, on peut utiliser encore une boucle comparable à celle de la somme en remplaçant `S +=` par `P *=`

On peut aller plus loin, par exemple si l'on veut calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (qui sont des entiers), on peut le faire en calculant des factorielles et en faisant le rapport, on peut utiliser des fonctions récursives (voir plus tard) et il existe des modules qui les donne directement (par exemple la fonction `binom` de `scipy.special` mais ça ce sera pour ceux qui en veulent plus).

Remarque : Ne pas confondre `a//b` qui est le quotient de la division de a par b et est donc toujours entier et `a/b` qui est le résultat de la division de a par b et n'est pas toujours un entier.

```
In [21]: 17 // 4
Out[21]: 4
In [22]: 17/4
Out[22]: 4.25
```

3. Instruction conditionnelle

On utilise les instructions prédéfinies en Python qui sont **if**, **elif** et **else** de la façon suivante.

```
# cas d'une alternative

if condition :
    instructions1
else :
    instructions2
```

```
# cas de plusieurs alternatives

if condition1 :
    instructions1
elif condition2 :
    instructions2
elif condition3 :
    instructions3
else :
    instructions4
```

Par exemple :

```
In [28]: x = 10

In [29]: if x < 5 :
...:     print(x, "est plus petit que 5 ")
...: else :
...:     print(x , " est egal ou plus grand que 5")
...:
10 est egal ou plus grand que 5
```

4. La fonction prédéfinie print

Ce dernier exemple a permis d'introduire une fonction importante de Python qui est **print**. Cette fonction affiche des résultats. On peut en afficher plusieurs en séparant les arguments avec des virgules. Donnons un exemple.

```
In [1]: a=3
In [2]: print(2*a, a*a, a**10)

6 9 59049
```

On voit aussi sur l'exemple du paragraphe précédent que **print** peut afficher du texte et la syntaxe est **print("texte")**

Exercice 01 Affecter 5 à la variable **x** puis écrire le code qui affiche « **x** est positif » si **x** > 0 et qui affiche « **x** est négatif ou nul » sinon.

Remarque : Il existe une autre fonction qui agit comme **print** c'est-à-dire affiche le résultat. C'est **return**. Mais attention, il y a une différence importante. Si l'on fait appel à **print** trois fois consécutivement par exemple, il y aura trois affichages et pour **return**, c'est le premier exécuté qui s'affiche. On reviendra sur **return** plus loin au moment de la construction de procédures Python. Cette fonction sera alors tout à fait adéquate.

5. L'instruction break

L'instruction **break** permet de casser l'exécution d'une boucle **while** ou **for**. Elle fait sortir de la boucle et passer à l'instruction suivante éventuelle.

```
In [1]: for i in range(10):
...:     print("debut iteration",i)
...:     print("good bay")
...:     if i == 2:
...:         break
...:     print("fin iteration",i)
...: print("cette horrible boucle est finie")
debut iteration 0
good bay
fin iteration 0
debut iteration 1
good bay
fin iteration 1
debut iteration 2
good bay
cette horrible boucle est finie
```

Notons enfin que dans le cas de boucles imbriquées (voir plus loin dans le cours), l'instruction **break** ne fait sortir que de la boucle la plus interne.

6. Les chaînes, les ensembles, les tuples et les listes

Dans tout programme Python, on rencontre rapidement ces types de structures. Il faut les reconnaître et utiliser les bonnes syntaxes.

6-1 Commençons par les tuples

Un tuple permet de créer une **collection ordonnée de plusieurs éléments**. Ce sont mathématiquement des *p*-uplets. Comme pour les *p*-uplets, un tuple peut commencer par (et finir par), c'est-à-dire des parenthèses. Mais ce n'est pas obligatoire comme nous allons le voir.

```

In [5]: a = (5,4,7)
In [6]: type(a)
Out[6]: tuple
In [7]: b,c = 5,6
In [8]: b
Out[8]: 5
In [9]: c
Out[9]: 6
In [10]: a = (3,4)
In [11]: u,v = a
In [12]: u
Out[12]: 3
In [13]: v
Out[13]: 4
In [14]: a[0], a[1]
Out[14]: (3, 4)

```

Ainsi, `a[i]` est la valeur d'indice `i` du tuple `a`.

Remarque : On ne peut pas ajouter, supprimer ou modifier des éléments d'un tuple après sa création, on dit qu'un tuple **n'est pas mutable**.

Les opérations possibles sont : la longueur. Si `a` est le tuple, le code `len(a)` renvoie la longueur du tuple. Puis l'accès par indice positif, la concaténation avec `+`, la répétition avec `*` et la tranche. Nous verrons plus en détail ces opérations avec les chaînes de caractères car c'est la même syntaxe.

Dépaquetage d'un tuple

Il existe quand même une autre opération qu'on peut faire avec l'opérateur `*`. Le mieux c'est faire un exemple.

```

In [16]: a,b,c="mickey","donald","picsou","daisy"
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-16-2ffa94677b58>", line 1, in <module>
    a,b,c="mickey","donald","picsou","daisy"

ValueError: too many values to unpack (expected 3)

# on voit que dans le tuple on attend 3 elements

In [17]: a,*b,c="mickey","donald","picsou","daisy"

In [18]: a,b,c
Out[18]: ('mickey', ['donald', 'picsou'], 'daisy')

# on a alors bien 3 elements car 2 elements
# se sont concatenes en une liste (voir 5-3)

```

6-2 Continuons par les chaînes de caractères

Une chaîne de caractère en Python ou string est une série ordonnée de caractères. Elle peut être une combinaison d'une ou plusieurs lettres, chiffres et caractères spéciaux. Comme pour les tuples, on ne peut pas modifier une chaîne de caractères une fois créée. Elle est **non mutable**. Une chaîne de caractères commencent et finissent par des apostrophes ou des guillemets. Ainsi on a déjà écrit des chaînes de caractères plus haut. elles sont de type **str** et par exemple **"mickey"** est une chaîne de caractères.

Comme pour les tuples, les opérations possibles sont : longueur, accès par indice positif, concaténation avec **+**, répétition avec ***** et tranche. Nous allons donner des exemples détaillés.

Concaténation et répétition des chaînes de caractères en Python

Pour la concaténation :

```
In [1]: str1 = 'Salut!' ; str2 = 'les champions'

# premiere syntaxe

In [2]: print(str1 , str2)
Salut! les champions

In [3]: # autre syntaxe

In [4]: print(str1 + ' ' + str2)
Salut! les champions

In [5]: print(str1 + ' ' + str2)
Salut! les champions

In [6]: # remarquer l'espace entre les apostrophes
```

Pour la répétition :

```
In [7]: (str1 + ' ' + str2 + " ") * 8

Out[7]: 'Salut! les champions Salut! les champions Salut! les
champions Salut! les champions Salut! les champions Salut! les
champions Salut! les champions Salut! les champions '
```

Appartenance et comparaison des chaînes de caractères

L'idée est de tester si une séquence existe ou non dans une chaîne de caractères en utilisant l'instruction **in** de Python.

```

In [14]: str1 = 'Good day'
In [15]: 'b' in str1
Out[15]: False
In [16]: 'b' not in str1
Out[16]: True
In [17]: 'g' in str1
Out[17]: False
In [18]: 'G' in str1
Out[18]: True
In [18]: id('g'), id('G')
Out[18]: (2658593704880, 2658593912112)

```

On remarque comme prévu que **g** et **G** ne sont pas identiques et ne sont donc pas à la même adresse.

Accéder aux caractères d'une chaîne

Nous pouvons accéder aux caractères d'une chaîne en utilisant l'indexation avec des nombres entiers. On rappelle que le premier indice est 0 par défaut et que l'on peut user des indices négatifs. Ainsi l'indice -1 représente le dernier élément et -2 l'avant dernier. Cette technique des indices négatifs est utilisée par exemple si l'on ne connaît pas la longueur n de la chaîne. Ainsi l'indice $n - 1$ qui correspond au dernier élément est aussi -1 .

```

In [21]: str3 = 'python est trop chouette'
In [22]: str3[0] , str3[-1] , str3[6] , str3[23]
Out[22]: ('p', 'e', ' ', 'e')
# remarquer que les espaces dans str3 comptent chacun pour un
# caractere

In [23]: str3[2 : 5]
Out[23]: 'tho'

# On a une commande qui renvoie toute la chaine
In [24]: str3[ : ]
Out[24]: 'python est trop chouette'

In [25]: # on a une commande qui permet de sauter des indices ici
# de indice 1 a indice 8 en sautant 1 indice sur 2
In [26]: str3[2:9:2]
Out[26]: 'to s'
In [27]: str3[0:9:1]
Out[27]: 'python es'
In [28]: str3[::3]
Out[28]: 'ph tr ot'

```

Alors **str[i:j:p]** renvoie de **str[i]** à **str[j-1]** au max en sautant $p - 1$ caractères

Exercice 02 Que renvoie **str3[-2]** ? Que renvoie **str3[7 : 11]** ?

Quel code pour obtenir **chouette** en entier ? Que renvoie **str3[4:11:4]** ?

Caractère d'immuabilité d'une chaîne de caractères. Revenons sur le fait que les chaînes de caractères en Python ne peuvent pas être modifiées. Reprenons l'exemple de `str3` précédent.

```
In [32]: str3[0] = 'P'
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-32-7198369e7046>", line 1, in <module>
    str3[0] = 'P'

TypeError: 'str' object does not support item assignment
```

Impossible de remplacer `p` par `P`

6-3 Au tour des listes d'entrer en scène

Elles sont ordonnées comme les tuples et les chaînes de caractères et pour les différencier, elles commencent par le symbole `[` et finissent par le symbole `]`. Et les listes **sont mutables** comme nous allons le voir avec certaines des commandes suivantes. Enfin, on retrouve des opérations communes avec les tuples ou les chaînes de caractères. Par exemple `+` qui concatène deux listes ou `L[i : j]` qui extrait une partie de la liste. Donnons une liste de ces commandes utiles et on vous conseille de vous référer à cette liste sans modération.

- *Syntaxe d'une liste.* Par exemple, on tape `[3, 1, 2]`
- *Liste vide.* Pour la créer, on tape `[]`
- *Longueur d'une liste L.* On tape `len(L)`
- *Premier élément de la liste L.* On écrit `L[0]`
- *Dernier élément de la liste L.* On écrit `L[-1]` ou `L[len(L)-1]`
- *Ajout de l'élément x en position i dans la liste L.* On écrit `L.insert(i,x)`
- *Ajout de l'élément x en fin de la liste L.* On écrit `L.append(x)`
- *Suppression du dernier élément x de la liste L.* On écrit `L.pop()`
- *Suppression de l'élément L[i] de la liste L.* On écrit `L.pop(i)`
- *Renvoie le nombre d'occurrences de x dans L.* On écrit `L.count(x)`
- *Somme des éléments d'une liste L.* On tape `sum(L)`
- *Concaténation de la liste L1 et de la liste L2.* On écrit `L1+L2`
- *Suppression de l'élément d'indice i dans la liste L.* On écrit `del(L[i])`
- *maximum et minimum de la liste L.* On écrit `max(L)` et `min(L)`
- *Appartenance de l'élément x à la liste L.* On écrit `x in L`
- *Tri d'une liste L.* On écrit `L.sort()`
- *Création d'une copie d'une liste L nommée newL.* On écrit `newL = L[:]`
- *Sous-liste tirée de L de i à j - 1.* On écrit `L[i:j]`
- *Sous-liste tirée de L du début à j - 1.* On écrit `L[:j]` ou `L[0:j]`
- *Sous-liste tirée de L de i à la fin.* On écrit `L[i:]` ou `L[i:len(L)]`

On peut utiliser les trois derniers items pour les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. Ce sera fait au chapitre 10.

Exercice 03 : *Taper le code qui dans une variable **L** affecte la liste des entiers pairs de 0 à 10. Puis écrire l'instruction qui permet d'avoir la sous-liste des deux derniers éléments de **L** et écrire l'instruction qui permet de rajouter 12 à **L**. Enfin, donner l'instruction qui permet d'ajouter 5 dans **L** pour qu'il soit entre 4 et 6.*

Comment créer une liste ?

Il y a plusieurs méthodes. On peut utiliser **append** autant de fois que nécessaire. On peut parfois aller plus vite. Reprenons le cas de l'exercice 03.

```
# Utilisation de la boucle for et de range
In [33]: L = [k for k in range(0,11,2)]
In [34]: L
Out[34]: [0, 2, 4, 6, 8, 10]
```

Exercice 04 : *Créer une liste composé des 10 premiers cubes d'entiers en utilisant une boucle **for***

On peut aussi créer une liste en répétant un élément.

```
# Utilisation de l'opérateur *
In [35]: 14*[0]
Out[35]: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

Comment parcourir les éléments d'une liste ?

On utilise généralement la boucle **for**

```
In [2]: c = ["Bonnie", "Clyde", "Laurel", "Hardy", "Tristan", "Iseu"]

In [3]: for i in range(len(c)):
...:     print("i vaut", i, "et c[i] vaut", c[i])
...:
i vaut 0 et c[i] vaut Bonnie
i vaut 1 et c[i] vaut Clyde
i vaut 2 et c[i] vaut Laurel
i vaut 3 et c[i] vaut Hardy
i vaut 4 et c[i] vaut Tristan
i vaut 5 et c[i] vaut Iseu
```



```

In [4]: for k in c:
...:     print("k vaut", k)
k vaut Bonnie
k vaut Clyde
k vaut Laurel
k vaut Hardy
k vaut Tristan
k vaut Iseu

```

Comment ajouter ou retrancher des éléments à une liste ?

Pour ajouter en fin de liste, on utilise **append**, pour ajouter entre deux éléments, on utilise **insert**. Pour enlever le dernier élément de **L**, on utilise **L.pop()** et pour enlever l'élément d'indice **i**, on utilisera **L.pop(i)**. On peut remarquer que ces opérations transforment définitivement la liste.

```

In [63]: # On cree une liste L puis on enleve son dernier element
In [64]: L = [1,2,3,4,5,6,7]
In [65]: elt = L.pop()
In [66]: elt, L
Out[66]: (7, [1, 2, 3, 4, 5, 6])
In [67]: # Puis on enleve l'element d'indice 3 qui est 4
In [68]: new_elt = L.pop(3)
In [69]: new_elt, L
Out[69]: (4, [1, 2, 3, 5, 6])
In [70]: # on cherche l'emplacement de L dans la memoire
In [71]: id(L)
Out[71]: 2658740700224
In [72]: # on remet 7 a la fin de L
In [73]: L.append(7)
In [74]: L
Out[74]: [1, 2, 3, 5, 6, 7]
In [75]: # Puis on enleve 7 de nouveau
In [76]: L.pop()
Out[76]: 7
In [77]: L
Out[77]: [1, 2, 3, 5, 6]
In [78]: id(L)
Out[78]: 2658740700224
In [79]: # Conclusion : apres l'action de append et pop(), L se
retrouve a la meme place dans la memoire qu'avant ces deux
actions et donc il s'agit de la meme liste.

```

Pour finir le paragraphe des types structurés, on va maintenant mélanger les genres. En effet, les tuples, les listes et les chaînes de caractères peuvent cohabiter dans le meilleur des mondes. C'est l'occasion d'utiliser quelques unes des opérations propres à ces types structurés.

```

In [42]: t1 = 1, 3, 5
In [43]: t2 = "Alfred", 20
In [44]: t3 = ("Alfred", 20, ["Trail", "Triathlon"])
In [45]: t4 = ("Alfred", 20, ("trail", "triathlon"))

In [46]: t2[0]
Out[46]: 'Alfred'

In [47]: type(t3)
Out[47]: tuple

In [48]: type(t3[2])
Out[48]: list

In [49]: type(t4[2])
Out[49]: tuple

In [50]: t3+t4
Out[50]: ('Alfred', 20, ['Trail', 'Triathlon'], 'Alfred', 20, ('
    trail', 'triathlon'))

In [51]: t3[2]+t4[2]
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-51-4cea6a805325>", line 1, in <module>
    t3[2]+t4[2]
TypeError: can only concatenate list (not "tuple") to list

In [52] # on ne peut donc pas concatener un tuple et une liste

In [53]: len(t3), len(t4)
Out[53]: (3, 3)

In [54] # L'indexation peut fonctionner sur plusieurs niveaux
In [55]: t3[2][1]
Out[55]: 'Triathlon'

In [56]: t3[2][0]
Out[56]: 'Trail'

In [57] # Finissons par plusieurs operations a la fois
In [58]: t1*3+t2
Out[58]: (1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 'Alfred', 20)

```

■ Boucles imbriquées

Terminons ce chapitre par le cas de boucles imbriquées les unes dans les autres. Sous Python, chaque boucle sera à un niveau différent d'indentation. Le mieux comme d'habitude, c'est de faire un exemple.

```
In [79]: S = []
In [80]: for a in range(1,6):
...:     for b in range(1,6):
...:         S.append([a,b])
```

Que fait cette double boucle? Au départ, on crée une liste **S** qui est la liste vide. Puis on pose $a = 1$ et on ajoute avec l'attribut **append** dans **L** les listes **[1,b]** où b varie de 1 à 5. Puis on pose $a = 2$ et on continue en ajoutant dans **L** les listes **[2,b]** où b varie de 1 à 5. On s'arrête à $a = 5$ et le dernier élément ajouté est **[5,5]**. On remarque que **S** devient une liste de listes. Vérifions.

```
In [81]: print(S)
[[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 1], [2, 2], [2, 3],
 [2, 4], [2, 5], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [4,
 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [5, 1], [5, 2], [5, 3],
 [5, 4], [5, 5]]
```

Exercice 05 Écrire une double boucle utilisant **for** et **range** qui retourne $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^4 ij \right)$.

On pourra appeler **S** le résultat et initialiser avec **S = 0**.

Pour finir, l'imbrication peut concerner des instructions conditionnelles. Par exemple :

```
In [82]: a = 2
In [83]: if a > 0 :
...:     if a % 2 == 0 :
...:         print("le nombre est positif et pair")
...:     else:
...:         print("le nombre positif est impair")
...:
le nombre est positif et pair
In [84]: a = - 2
In [85]: if a > 0 :
...:     if a % 2 == 0 :
...:         print("le nombre est positif et pair")
...:     else:
...:         print("le nombre positif est impair")
In [86]:
```

Dans le second cas, il n'y a rien d'afficher. C'est normal l'instruction **if** intérieure n'est pas sollicitée. Enfin, on peut imbriquer des **while**, des **for**, des **if** etc. Que du bonheur!

Chapitre 2

Introduction to functions and procedures

■ Objectifs

Les incontournables :

- connaître la syntaxe pour créer une fonction Python ;
- connaître la différence entre `return x` et `print(x)` dans une fonction.

Et plus si affinités :

- savoir faire la différence entre une variable locale et une variable globale dans une procédure ;
- savoir créer une variable globale ;
- savoir créer une fonction booléenne.

Cours

■ Définition et création d'une fonction sous Python

1. Définition

Une fonction (on peut dire aussi procédure) est au sens informatique un ensemble d'instructions regroupées sous un nom qui renvoie un résultat lorsque son exécution se termine. Elle représente un sous-programme relativement indépendant du reste du programme et elle peut être appelée en plusieurs endroits du programme. En Python, le type correspondant est **function** et la définition d'une fonction doit impérativement respecter les règles ci-dessous.

- La première ligne de la définition commence par le mot-clé **def** suivi du nom de la fonction, de parenthèses entourant les paramètres (on dit aussi arguments) de la fonction séparés par des virgules puis du caractère « deux points ». Le nombre d'arguments est variable selon la fonction créée, certaines fonctions n'ont pas d'argument (attention elles conservent quand-même le parenthésage ())
- Les lignes suivantes (là aussi le nombre de lignes est variable selon la fonction) constituent le bloc d'instructions, indenté par rapport à la ligne de définition et forment le corps de la fonction. Dans ce bloc d'instruction, on peut rencontrer des boucles, des instructions conditionnelles et qui peuvent être imbriquées ;
- Le retour à la ligne signale la fin de la définition de la fonction.

On peut schématiser ainsi :

```
def NOMDEFONCTION(argument1 , argument2 , ... , argumentn) :  
    BLOC INSTRUCTION
```

Pas de **begin** ou de **end**. C'est l'indentation des lignes qui permet d'isoler le corps de la fonction.

2. L'instruction **return** et la différence avec **print**

Cette instruction **return** est assez fondamentale dans la construction d'une fonction. Elle n'est pas obligatoire (voir par exemple **ma_fonction** du paragraphe suivant), mais souvent très utile. En effet son appel dans la procédure permettra de renvoyer non seulement (et d'afficher) le (ou les) résultat(s) voulu(s) mais aussi d'affecter à **NOMDEFONCTION** la valeur trouvée.

En effet, supposons avoir construit la fonction **NOMDEFONCTION(argument1,argument2)** alors on donne une valeur à **argument1** et à **argument2**, respectivement **v1** et **v2**.

On tape alors **NOMDEFONCTION(v1,v2)** et un résultat doit s'afficher. C'est la commande **return** qui va permettre cela.

Donnons un exemple. On crée une fonction de nom : **multiplie_par_11** ayant un seul argument **n** et qui doit renvoyer $11n$. La commande appropriée est alors **return 11*n**

```
In [1]: def multiplie_par_11(n):
...:     return 11*n
...:
In [2]: multiplie_par_11(5)
Out[2]: 55
```

Remarquons que la syntaxe `return 11*n` et `return(11*n)` sont équivalentes.

Maintenant, tapons une nouvelle fonction `new_multiplie_par_11` qui est identique à la fonction précédente `multiplie_par_11` à ceci près que `return` est remplacé par `print`

```
In [1]: def new_multiplie_par_11(n):
...:     print(11*n)
...:
In [2]: new_multiplie_par_11(5)
Out[2]: 55
```

On remarque donc que *a priori* les deux fonctions sont comparables. Maintenant tapons :

```
In [5]: multiplie_par_11(7)*2
Out[5]: 154

In [6]: new_multiplie_par_11(7)*2
77
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-6-9539eedccad6>", line 1, in <module>
    new_multiplie_par_11(7)*2

TypeError: unsupported operand type(s) for *: 'NoneType' and 'int'
```

La différence c'est que `new_multiplie_par_11(7)` ne fait que renvoyer l'affichage du résultat qui est 77, c'est un `NoneType` pour Python et on ne peut pas le multiplier par 2 qui est un entier.

Conclusion : si seulement afficher le résultat compte, un `print` en fin de corps d'instruction suffira et si par contre on doit utiliser le résultat dans d'autres opérations (voire dans d'autres fonctions), un `return` s'impose.

Warning : il faut quand même utiliser `return` avec modération dans la création d'une fonction. En effet, l'instruction `return` interrompt l'exécution de la fonction : aucune des instructions situées après le premier `return` ne sera exécutée.

Le mieux encore une fois c'est un exemple pour comprendre et visualiser le problème.


```
In [3]: def multiplie_par_11(n):
...:     return ("arretez vos etudes!")
...:     return 11*n
...:
In [4]: multiplie_par_11(5)
Out[4]: 'arretez vos etudes!'
```

Par contre dans le cas de boucles conditionnelles imbriqués, chaque racine de ces boucles peut contenir un **return** qui ne sera pas en compétition avec les autres. On le verra plus loin dans des fonctions plus élaborées que celles du début du cours.

Exercice 01 : Écrire une procédure **MIXAGE_SOM_PROD** d'arguments **x** et **y** et qui renvoie un couple de première composante la somme de **x** par **y** et de seconde composante le produit de **x** par **y**. Si l'on tape **MIXAGE_SOM_PROD(4,2) * 3** qu'est ce qui s'affiche ?

3. Exemple de fonction sans argument. Introduction aux variables locales et globales

```
In [5]: def ma_fonction():
...:     x = 2
...:     print("x vaut {x} dans la fonction")
In [6]: ma_fonction()
x vaut 2 dans la fonction
```

Ici **ma_fonction** affichera toujours **x vaut 2 dans la fonction**.

Une remarque intéressante. On affecte la variable **x** avec 2 dans la procédure. Par contre, de retour dans le module principal, il ne connaît plus **x** et renvoie un message d'erreur.

```
In [7]: print(x)
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-7-fc17d851ef81>", line 1, in <module>
    print(x)
NameError: name 'x' is not defined
```

On dit que la variable **x** est **locale**.

Remarque : pour éviter des virgules dans l'affichage, on a utilisé la syntaxe **x** entre accolades.

Transformons notre fonction précédente en y mettant **x** comme argument.

```
In [8]: def ma_fonction(x):
...:     print("x vaut {x} dans la fonction")

In [9]: ma_fonction(2)
x vaut 2 dans la fonction
```

Encore une fois, on tape **print(x)**

```
In [10]: print(x)
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-10-fc17d851ef81>", line 1, in <module>
    print(x)
NameError: name 'x' is not defined
```

x reste une variable locale.

```
In [13]: def ma_fonction():
...:     print(x)
In [14]: x=3
In [15]: ma_fonction()
3
In [16]: print(x)
3
```

Ici comme **x** a été réaffecté hors procédure, elle reste donc visible en dehors de celle là.

Par contre Python ne permet pas directement la modification d'une variable globale dans le corps de la procédure.

```
In [17]: def ma_fonction():
...:     x = x+1
In [18]: x =1
In [19]: ma_fonction()
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-19-b20fc4808f49>", line 1, in <module>
    ma_fonction()
  File "<ipython-input-17-227aa57c397b>", line 2, in ma_fonction
    x = x+1
UnboundLocalError: local variable 'x' referenced before
assignment
```

Il faut indiquer à Python que **x** est bien une variable globale. Et alors ça fonctionne!

```
In [25]: def ma_fonction():
...:     global x
...:     x=x+1
...:     return x
In [26]: x=1
In [27]: ma_fonction()
Out[27]: 2
```

Résumé sur ces deux types de variables

Les **variables locales** sont les variables créées à l'intérieur de la fonction : il s'agit des éventuels arguments et des variables qui sont créées dans le bloc d'instructions. Ces variables ne sont pas accessibles à l'extérieur de la fonction.

Les **variables globales** regroupent les variables contenant les objets prédéfinis en Python ainsi que les variables créées à l'extérieur de la fonction. Il existe un troisième type de variable globale. Il s'agit de variables créées ou modifiées à l'intérieur d'une fonction. Dans ce cas, on utilise l'instruction **global** comme dans l'exemple précédent.

Warning : une erreur classique est d'utiliser le nom d'une variable globale avec une autre affectation dans la procédure. En effet, quand Python a besoin de connaître la valeur d'une variable **a** par exemple, il cherche d'abord si **a** a une signification localement et ne lui affecte sa valeur globale que s'il n'a pas trouvé de valeur locale. Donnons un exemple.

```
In [7]: a = 5

In [8]: def f(x):
...:     a = 2
...:     return a*x

In [9]: f(3), a
Out[9]: (6, 5)
```

En effet, pour calculer **f(3)**, Python a utilisé la valeur 2 pour **a** mais quand on lui demande d'afficher **a** à l'extérieur de la procédure, il se souvient que **a** vaut 5. Allons chercher **global** dans le rôle de Zorro.

```
In [11]: a = 5

In [12]: def f(x):
...:     global a
...:     a = 2
...:     return a*x

In [13]: f(3), a
Out[13]: (6, 2)
```

Python a maintenant mémorisé l'affectation faite à l'intérieur de la fonction.

Conseil. Utiliser l'instruction `global` avec modération. Si l'énoncé vous l'impose, vous n'avez pas le choix. Si vous voulez éviter un souci tel que plus haut, vous créez votre variable globale. Sinon, en travaillant seulement avec des variables locales, on n'a pas besoin de se préoccuper des noms donnés à l'extérieur de la procédure. Et de plus, si l'on a créé des variables globales, en cas de problème, la détection de ce problème se complique car tout peut être modifié n'importe où. Et enfin, dernier inconvénient, l'encombrement mémoire est bien plus important pour des variables globales que locales car pour ces dernières, la mémoire n'est utilisée que pendant l'exécution de la fonction.

■ Quelques exemples de création de fonctions Python

Exemple 01. Créer une fonction `SOMME_SPECIALE(n)` qui renvoie $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i^3 j^2 \right)$.

Indication : On pourra introduire une variable locale `s`

Réponse :

```
In [6]: def SOMME_SPECIALE(n):
...:     s = 0
...:     for i in range(1,n+1):
...:         for j in range(1,n+1):
...:             s += (i**3)*(j**2)
...:     return s
...:

In [7]: SOMME_SPECIALE(10)
Out[7]: 1164625

In [8]: SOMME_SPECIALE(0)
Out[8]: 0
```

Exemple 02. Soit la procédure :

```
In [1]: def UNKNOWN01(n):
...:     for i in range(20):
...:         if (i * n) % 3 == 0:
...:             print(i*n, "*")
...:         else :
...:             print(i*n)
```

Que fait cette fonction ? Si l'on tape `UNKNOWN01(5)`, que va-t-elle afficher ?

Exemple 03. Soit la fonction mathématique g définie sur $[0, 2[$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Créer une fonction Python nommée g d'argument x qui retourne $g(x)$ puis écrire l'instruction qui affiche la liste des valeurs $g(1/k)$ pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Si l'on affiche la liste des valeurs $g(k)$ pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, qu'obtient-on ?

Indication : pour la création de la fonction, on utilisera les instructions conditionnelles **if**, **elif** et **else**. On pourra faire afficher « valeur de l'antécédent erroné » dans le cas où $x \notin [0, 2[$ dans la procédure. Par ailleurs, on rappelle que $a < x$ and $x \leq b$ signifie que $x \in]a, b]$.

Réponse :

```
In [3]: def g(x):
...:     if 0 <= x and x < 1:
...:         return x
...:     elif 1 <= x and x < 2 :
...:         return 1
...:     else :
...:         print("valeur de l'antecedent errone")

In [4]: [g(k) for k in range(1,7)]
valeur de l'antecedent errone
valeur de l'antecedent errone
valeur de l'antecedent errone
valeur de l'antecedent errone
valeur de l'antecedent errone
Out[4]: [1, None, None, None, None, None]

In [5]: [g(1/k) for k in range(1,7)]
Out[5]: [1, 0.5, 0.3333333333333333, 0.25, 0.2,
0.16666666666666666]
```

Relevons la présence de **None** pour signifier qu'il n'y a rien.

Exemple 04. L'intérêt d'une fonction Python c'est qu'elle peut être appelée dans la création d'une autre fonction.

Soit la fonction mathématique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \leq x < 2 \\ x(x-2) & \text{pour } x \geq 2 \end{cases},$$

où g est la fonction mathématique de l'exemple précédent.

Créer la fonction Python nommée f d'argument x qui retourne $f(x)$.

Indication : encore une fois on utilise les instructions conditionnelles **if**, **elif** et **else** et on pourra faire afficher « valeur de l'antécédent erroné » dans le cas où $x \notin [0, +\infty[$ dans la procédure.

Réponse :

```

In [13]: def f(x):
...:     if 0 <= x and x < 2:
...:         return g(x)
...:     elif x >= 2:
...:         return x*(x-2)
...:     else :
...:         print("valeur de l'antecedent errone")
In [14]: f(1)
Out[14]: 1
In [15]: f(5)
Out[15]: 15
In [16]: f(-1)
valeur de l'antecedent errone

```

Exemple 05. Nous allons créer une fonction booléenne donc qui retourne **True** ou **False**. Ce type de fonction se rencontre fréquemment. Nous allons tester si une liste est un palindrome. Un palindrome se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant le même sens. Par exemple [*lamarieeiramal*] ou [12321].

Nommons notre fonction **palindrome** d'argument **L** qui renverra **True** si **L** est un palindrome et **False** si **L** ne l'est pas.

Posons donc **L** une liste que l'on veut tester et de longueur **n**, l'idée est de commencer par tester **L[0] != L[n-1]**

Si cette assertion est vraie alors on retourne **False** puis on teste **L[1] != L[n-2]**

Si cette assertion est vraie alors on retourne **False** et on continue ainsi.

On peut donc créer une boucle **for** qui fait varier **i** de 0 jusqu'à non pas $n-1$ (ce serait maladroit!) mais jusqu'à $n//2$.

Enfin imaginons que l'on a jamais **L[i] != L[n-1-i]** Dans ce cas, il faut retourner **True**. On prendra soin de l'écrire après la fin de la boucle **for**. Voilà ce que cela donne :

```

In [17]: def palindrome(L):
...:     n = len(L)
...:     for i in range(n//2):
...:         if L[i] != L[n-1-i] :
...:             return False
...:     return True
...:
In [18]: palindrome([1,2,3,2,1])
Out[18]: True
In [19]: palindrome(["l","a","m","a","r","i","e","e","i","r","a",
...:                  "m","a","l"])
Out[19]: True
In [20]: # on rappelle que les lettres sont des chaines de
...:      caracteres et mises entre apostrophes ou guillemets

In [21]: palindrome([1,2,3,4,5])
Out[21]: False

```

Exemple 06. Donnons un cas avec beaucoup plus d'arguments. Il s'agit ici d'une procédure qui a 5 arguments : une fonction **f**, trois flottants **t0**, **t1**, **y0** et un entier **n**. Cette procédure renvoie une courbe qui représente une solution d'équation différentielle par la méthode d'Euler. Vous comprendrez les codes Python utilisés dans le bloc d'instruction de cette fonction **EulerAffich** plus tard dans l'année et en TSI2.

```
In [22]: def EulerAffich(f,t0,tn,n,y0) :
          h = (tn-t0)/float(n) ; ymin = y0 ; ymax = y0
          t = t0 ; y = y0 ; T = [t0] ; Y = [y0]
          for k in range(n) :
              y = y + h*f(y,t) ; t = t + h
              ymin = min(ymin,y)
              ymax = max(ymax , y)
              T.append(t) ; Y.append(y)
          deltaT = (tn-t0)/10 ; deltaY = (ymax-ymin)/10
          plt.plot(T, Y, color = 'b ') ; plt.grid()
          plt.axis([t0-deltaT,tn+deltaT,ymin-deltaY,ymax+
                    deltaY])
          plt.axhline(color = ' 0 ')
          plt.axvline(color = ' 0 '); plt.show()
```

Remarque : On peut remarquer que dans le cas de la création d'une fonction un peu longue comme celle là, on peut mettre plusieurs commandes indépendantes sur la même ligne de code en les séparant par ;

Exemple 07. Il y a un cas important non encore développé pour l'instant. C'est le cas où la fonction est appelée à l'intérieur de son bloc d'instruction. On parle de fonction récursive. Un chapitre spécial sera consacré bien plus tard dans l'année à ce type de fonction. Il faudra avoir étudié les suites réelles auparavant en Maths. Donnons quand même juste pour le fun une fonction qui s'appelle elle-même pour voir ce que c'est. Reprenons la fonction **g** de l'exemple 03 et transformons la fonction **f** de l'exemple 04.

Soit la fonction mathématique *newf* définie sur $[0, +\infty[$ par : $x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ f(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

La fonction Python nommée **newf** d'argument **x** qui retourne **newf(x)** pourra s'écrire :

```
In [24]: def newf(x):
          ...:     if 0 <= x and x < 2:
          ...:         return g(x)
          ...:     elif x >= 2 :
          ...:         return newf(x-2)
          ...:     else :
          ...:         print("valeur de l'antecedent errone")
          ...:
```

Faisons fonctionner **newf** juste pour voir.

```
In [25]: newf(1)
Out[25]: 1

In [26]: newf(2)
Out[26]: 0

In [27]: newf(3)
Out[27]: 1

In [28]: newf(100)
Out[28]: 0

In [29]: newf(-0.1)
valeur de l'antecedent errone
```

En fait $newf(2n) = 0$ pour tout entier n .

Un autre exemple de fonction récursive que vous rencontrerez en TSI2 concerne le tri fusion qui est le tri le plus performant. Cette année vous verrez d'autres tris, en particulier le tri-bulles dont la programmation ne nécessite pas de récursivité.

Chapitre 3

Search for values. Counting

■ Objectifs

Les incontournables :

- savoir créer un compteur simple à partir d'une boucle **for** ou **while** ;
- savoir créer une variable accumulatrice à partir d'une boucle **for** ou **while** ;
- savoir créer une fonction booléenne qui indique la présence d'une valeur à partir d'une boucle **for** ou **while** ;
- savoir rechercher la première occurrence à partir d'une boucle **for** ou **while** ;
- savoir rechercher la dernière occurrence à partir d'une boucle **for** ou **while** ;
- savoir créer une fonction qui renvoie le maximum d'une liste ordonnée ;
- savoir créer une fonction qui renvoie le minimum d'une liste ordonnée ;
- savoir reconnaître un dictionnaire.

Et plus si affinités :

- savoir récupérer les clés ou les valeurs dans un dictionnaire et une valeur connaissant la clé.
- savoir créer une fonction qui renvoie le nombre de fois où apparaissent tous les éléments d'une liste d'entiers ;
- savoir créer une fonction qui renvoie le nombre de fois où apparaissent tous les éléments d'une chaîne de caractères ;
- savoir créer une fonction qui renvoie **True** si un motif appartient à un texte et **False** sinon.

Cours

■ Compteurs

Lorsqu'on utilise une boucle **for**, on connaît en général à l'avance le nombre de passage dans la boucle. À moins que l'on ajoute un test (voir l'exemple 2). Mais par contre lorsqu'on utilise une boucle **while**, on ne connaît pas ce nombre de passages mais on peut souhaiter compter le nombre de passages dans la boucle. On utilise une variable (en général locale) que l'on peut appeler **compteur** ou **cpt** par exemple. Cette variable est toujours initialisée à 0 et incrémentée à chaque passage de la boucle. C'est ce que l'on va illustrer par l'exemple 01.

Exemple 01.

On construit un programme **taille** qui désire compter le nombre de divisions euclidiennes successives de n par 2, jusqu'à arriver à un quotient nul.

```
In [1]: def taille(n):
...:     cpt = 0
...:     while n > 0:
...:         cpt = cpt + 1
...:         n = n // 2
...:     return cpt
In [2]: taille(2), taille(5), taille(20), taille(180000)
Out[2]: (2, 3, 5, 18)
```

Dans cet exemple, le compteur est incrémenté de toute façon.

Exemple 02.

Le programme suivant va lister les entiers de 1 à n . Et nous incrémentons le compteur chaque fois que cet entier **d** est un diviseur de **n**, c'est-à-dire si $n \% d == 0$

```
In [3]: def diviseurs(n):
...:     cpt = 0
...:     for d in range(1,n+1):
...:         if n % d == 0 :
...:             cpt = cpt + 1
...:     return cpt
In [4]: diviseurs(1), diviseurs(8), diviseurs(1458)
Out[4]: (1, 4, 14)
```

Exercice 01. Écrire une fonction nommée **nombre_de_e** d'argument une chaîne de caractères appelée **chaîne** et qui renvoie le nombre de 'e' contenus dans **chaîne**. On nommera **cpt** la variable

compteur et on appellera **car** un élément quelconque de **chaîne**. Pour faire la boucle, on utilisera la syntaxe **for car in chaîne**: On n'oubliera pas l'instruction conditionnelle.

```
# Sur un exemple, cela donne :  
In [2]: nombre_de_e('en francais , il y a plein de e')  
Out[2]: 4
```

Exemple 03. Dans la procédure que l'on construit, on peut avoir à retourner le résultat pour lequel la procédure est créée mais aussi le nombre de passages dans la boucle et donc par exemple il est alors pratique de retourner un couple résultat-compteur. Reprenons `diviseurs` en ce sens et modifions le.

```
In [2]: def new_diviseurs(n):  
...:     cpt = 0 ; L = []  
...:     for d in range(1,n+1):  
...:         if n % d == 0 :  
...:             cpt = cpt +1 ; L.append(d)  
...:     return(cpt , L)  
In [3]: new_diviseurs(8) , new_diviseurs(458)  
Out[3]: ((4, [1, 2, 4, 8]), (4, [1, 2, 229, 458]))
```

■ Accumulateurs

C'est une extension de la notion de compteur. Un accumulateur peut être incrémenté d'une valeur différente de 1 ou même être décrémenté. Le mieux ce sont encore des exemples.

Exemple 04.

```
In [1]: def somme_paires(L):  
...:     acc = 0  
...:     for x in L:  
...:         if x % 2 == 0 :  
...:             acc = acc + x  
...:     return acc
```

Que renvoie `somme_paires([-2,0,4,1,5,4,8,7])` ?

Exemple 05.

```
In [6]: def mystery01(L):  
...:     acc = 0  
...:     for x in L:  
...:         acc = acc + x  
...:     acc = acc/len(L)
```

Que renvoie `mystery01([-2,0,4,1,5,4,8,0,1,-1])` ?

Dans la fonction `mystery01`, si n est la longueur de la liste `L`, nous disons que *le coût est linéaire en n* car nous opérons n additions et n affectations dans la boucle `for`. Et l'obtention de la longueur par `len(L)` a un coût constant (une seule opération).

■ Recherche de valeurs

1. Recherche de la présence d'une valeur avec `while` ou `for`

Commençons avec des exemples utilisant une boucle `while`. L'idée est de rechercher si `val` est un élément de `tab` qui est un type structuré. Les fonctions proposées seront booléennes c'est-à-dire qu'elles renverront `True` si `val` est dans `tab` et `False` sinon.

Exemple 06. La fonction ici s'appelle `recherche_V1`.

Nommons `presence` la variable booléenne qui est renvoyée à la fin de la procédure. Elle vaut `False` par défaut.

Comme on utilise `while`, on incrémente avec `i` initialisé à `i=0`. Et on met `i = i+1` dans la boucle en dernière instruction.

Ensuite, que va t-on mettre dans la condition de la boucle? On doit mettre pour commencer `i < len(tab)` car quand `i` devient au moins aussi grand que `len(tab)`, la quantité `tab[i]` n'a plus de sens. Il faut aussi signaler à Python que dès qu'il découvre que `tab[i]` vaut `val`, il doit sortir de la boucle. On se sert de la variable `presence`. En effet, tant que `val` n'est pas trouvé, la valeur de `presence` reste `False` et `not presence` est alors `True`. Or si l'on rajoute la condition `True` dans une boucle `while`, elle fonctionne et si l'on rajoute par contre la condition `False`, elle ne fonctionne pas. Regardons ce code :

```
In [3]: i = 0
In [4]: while i < 5 and True :
...:     i=i+1
In [5]: i
Out[5]: 5
```

Donc la boucle a fonctionné!

```
In [8]: i = 0
In [9]: while i <5 and False :
...:     i=i+1
In [10]: i
Out[10]: 0
```

Et ici, la boucle n'a pas fonctionné!

Il est temps de donner le code complet de `recherche_V1`.

```
In [10]: def recherche_V1(tab, val):
...:     presence = False
...:     i = 0
...:     while i < len(tab) and not presence :
...:         if tab[i] == val :
...:             presence = True
...:             i = i+1
...:     return presence
```

On fait fonctionner sur des exemples.

```
In [11]: recherche_V1([1,14,0,-1,7],7)
Out[11]: True

In [12]: recherche_V1("je ne sais pas le faire",'f')
Out[12]: True

In [13]: recherche_V1("je ne sais pas le faire",'ff')
Out[13]: False
```

Exemple 07. C'est en fait une forme remaniée de `recherche_V1` que l'on va appeler `recherche_V2`. On n'introduit plus le booléen `presence` et dans la boucle `while`, on remplace `not presence` par `tab[i] != val` et donc on boucle tant que `i < len(tab)` et `tab[i] != val`.

```
In [11]: def recherche_V2(tab, val):
...:     i = 0
...:     while i < len(tab) and tab[i] != val :
...:         i = i+1
...:     return tab[i] == val
```

Faisons fonctionner pour voir!

```
In [12]: recherche_V2([1,2,0,4,4,8,4,5],2)
Out[12]: True

In [13]: recherche_V2([1,2,0,4,4,8,4,5],5)
Out[13]: True
```

Tout semble bien aller! Faisons un cas où `val` n'est pas dans `tab`.

```
In [14]: recherche_V2([1,2,0,4,4,8,4,5],7)
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-14-54f3da8e4120>", line 1, in <module>
    recherche_V2([1,2,0,4,4,8,4,5],7)

  File "<ipython-input-11-ef1f0e5bd91e>", line 5, in recherche_V2
    return tab[i] == val
IndexError: list index out of range
```

Zut, on a un problème. En fait l'index `i` est hors du **range**. Cela vient du fait que comme Python ne trouve pas `val` pour le dernier `i`, il incrémente `i=i+1` et `tab[i]` n'existe pas. Donc il faut remplacer la condition `i<len(tab)` par `i<len(tab) - 1` et là ça va fonctionner comme on va le voir.

```
In [15]: def recherche_V2(tab, val):
...:     i = 0
...:     while i < len(tab)-1 and tab[i] != val :
...:         i = i+1
...:     return tab[i] == val
In [16]: recherche_V2([1,2,0,4,4,8,4,5],7)
Out[16]: False
```

Question : pourquoi `i < len(tab)` a fonctionné dans `recherche_V1`? Car pour la dernière valeur de `i` affectée, on ne demande pas d'utiliser `tab[i]` qui n'existera pas si `val` n'a pas été trouvé.

Exemple 08. Maintenant donnons une version avec la boucle `for` qui est entre-nous (légèrement) plus simple.

```
In [19]: def recherche_V3(tab, val):
...:     for i in range(len(tab)):
...:         if tab[i] == val :
...:             return True
...:     return False
```

L'idée est de retourner `True` la première fois que `tab[i] == val`. Si cela n'arrive pas, on retourne `False`. Ne pas oublier que c'est le premier `return` qui compte et donc si par exemple `tab[0] == val` est vrai, on retourne `True` même si Python continue la boucle avec des valeurs de `tab[i]` différentes de `val`.

```
In [21]: recherche_V3([1,2,0,4,4,8,4,5],7)
Out[21]: False
In [22]: recherche_V3([1,2,0,4,4,8,4,5],1)
Out[22]: True
```

2. Recherche de la première occurrence

Exemple 09. Tapons `first_occurrence` qui recherche le premier indice dans `tab` où est `val`. Utilisons une boucle `for` et on inclut le cas où `val` n'est pas dans `tab`.

```
In [22]: def first_occurrence(tab, val):
...:     for indice in range(len(tab)):
...:         if tab[indice] == val :
...:             return indice
...:     return (val, "n'est pas present. Achetez des lunettes!")
```

On fait fonctionner.

```
In [23]: first_occurrence([1,4,0,1,1,7,4],4)
Out[23]: 1
In [24]: first_occurrence([1,4,0,1,1,7,4],5)
Out[24]: (5, "n'est pas present. Achetez des lunettes !")
```

3. Recherche de la dernière occurrence

Exemple 10. Tapons `last_occurrence` qui recherche le dernier indice dans `tab` où est `val`. Utilisons encore une boucle `for` et on inclut toujours le cas où `val` n'est pas dans `tab`.

L'idée est d'initialiser `indice` à une valeur non entière (par exemple 0.1). Puis on parcourt tout `tab`. Chaque fois que `tab[i]` rencontre `val`, l'indice devient `i`. Et donc si `indice` a été transformé, on retourne la valeur du dernier `indice` qui est le dernier indice où on rencontre `val`. Sinon, on renvoie le même message que pour `first_occurrence`

```
In [27]: def last_occurrence(tab, val):
...:     indice = 0.1
...:     for i in range(len(tab)):
...:         if tab[i] == val :
...:             indice = i
...:     if indice != 0.1 : return indice
...:     return (val, "n'est pas present. Achetez des lunettes!")
```

On fait fonctionner.

```
In [29]: last_occurrence([1,4,0,1,1,7,4],4)
Out[29]: 6
In [30]: last_occurrence([1,4,0,1,1,7,4],3)
Out[30]: (3, "n'est pas present. Achetez des lunettes !")
```


4. Recherche d'un extremum

On va rechercher le maximum, le minimum sans utiliser les fonctions prédéfinies `min` et `max`. Attention, il faut avoir une liste d'éléments tous comparables. Donc ici on ne peut pas prendre des caractères. Il faut des entiers ou des flottants.

Cas du maximum

On va appeler `maximum` la procédure et surtout pas `max` qui est prédéfinie. Le but est de retourner le plus grand élément d'une liste `L`. On crée dans la procédure une variable locale `maxi` qui vaut `L[0]` en initialisation. Puis on boucle en partant de `i = 1` et on compare `L[i]` et `maxi`. Si `L[i] > maxi` alors `L[i]` devient le nouveau `maxi`.

On peut remarquer que si deux valeurs de `L` sont égales, on ne tient compte que de la première ce qui peut alléger le nombre d'opérations.

```
In [31]: def maximum(L):
...:     maxi = L[0]
...:     for i in range(1, len(L)):
...:         if L[i] > maxi:
...:             maxi = L[i]
...:     return maxi
...:
In [32]: maximum([-2,0.1,0.01,45,10**2,101,-5])
Out[32]: 101
```

Cas du minimum

Exercice 02. *C'est à vous ! Créer une procédure `minimum` qui renvoie le minimum d'une liste `L` en s'inspirant de la procédure `maximum`.*

■ Dictionnaire

Un dictionnaire est un objet de type `dict` est une séquence d'association d'une clé et d'une valeur. Une clé peut être n'importe quel objet, un `tuple` mais pas une liste ou un autre dictionnaire. On construit un dictionnaire en associant des successions de couples, chaque couple est constitué d'un premier élément, appelé clé, `keys` en Python et un second appelé valeur, `values` en Python. Les clés ne sont pas mutables, les valeurs associées quelconques (qui peuvent être à leur tour des dictionnaires). Ces clés ne sont pas ordonnées. Pour créer un dictionnaire, on écrit entre des accolades les couples clé-valeur, la clé et la valeur sont séparés par `:` et les couples par une virgule. Tout ceci sera approfondi d'ailleurs en TSI2. Donnons des exemples.

```
In [1]: d={0:1,'login':'lppr','pass':'lppr','proc':64}
In [2]: d['login']
Out[2]: 'lppr'
In [3]: for cle in d.keys(): print(cle)
Out[3]: 0 login pass proc
```

```

In [4]: for val in d.values(): print(val)
Out[4]: 1      lppr      lppr      64

In [5]: for cle, val in d.items(): print(cle, val)
Out[5]: 0 1
        login lppr
        pass lppr
        proc 64
In [6]: valeur = d.pop('proc') ; valeur
Out[6]: 64

```

Ainsi la commande `for cle in d.keys():` donne la liste des clés du dictionnaire `d` et la commande `for val in d.values():` donne la liste des valeurs du dictionnaire `d` et si l'on veut tous les couples on tape `for cle, val in d.items():`

Donnons maintenant un exemple plus élaboré.

```

In [7]: pays = {"France":{"capitale": "Paris",
                        "population": 68014000,
                        "superficie": 643800.0},
               "Portugal" : {"capitale": "Lisbonne",
                              "population": 10302674,
                              "superficie": 92300.0},
               "Italie" : {"capitale": "Rome",
                            "population" : 60359546,
                            "superficie" : 301336.0}}
In [8]: pays["France"]["population"]
Out[8]: 68014000
In [9]: pays["France"]
Out[8]: {'capitale': 'Paris', 'population': 68014000, 'superficie':
        643800.0}

```

On en a profité pour donner quelques commandes utiles pour les dictionnaires. Retenir que si `d` est un dictionnaire alors `d["nom_de_la_cle"]` renvoie la valeur de la clé nommée.

Pour finir, donnons des exemples de gros dictionnaires incorporé dans Python.

Donnons l'exemple de `__builtins__`. Les clés de ce dictionnaire sont les fonctions classiques (hors modules). Attention à la syntaxe. La barre `__` est constituée de deux fois le tiret sous le 8.

```

In [5]: __builtins__.__dict__['min'](5,2,3)
Out[5]: 2

```

Donnons tout ce qu'il y a dans la bête ou plutôt une partie car c'est trop long.

■ Comptage à l'aide d'un dictionnaire

0. Introduction. L'idée est de considérer un objet écrit sous forme d'un type structuré (liste, chaîne de caractères, tuple...) et de renvoyer les occurrences de chaque élément de cet objet (nombre de **e**, nombre de **1** dans l'objet etc.). On généralise les compteurs développés en début de ce chapitre où on s'intéresse à un seul élément en général.

1. Premier cas simple : on compte des entiers naturels

On rentre une liste d'entiers naturels appelée **entiers** et on renvoie une liste nommée **L** qui indique le nombre d'occurrences de chaque entier entre 0 et **max(entiers)**.

```
In [1]: def compte_version01(entiers):
...:     m = max(entiers)
...:     L = [0 for i in range(m+1)]
...:     for n in entiers :
...:         L[n] = L[n] + 1
...:     return L
```

Exercice 03. Faire fonctionner à la main **compte_version01**. On suppose que **entiers** est la liste **[3,8,1,5,7,4,5]**. Faire fonctionner **compte_version01** et retourner les différents **L** à chaque étape de la boucle **for**.

Maintenant, faisons bosser Python.

```
In [2]: compte_version01([0,3,4,11,1,1,1,7,4])
Out[2]: [1, 3, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
```

```
# on peut prendre des entiers negatifs pour voir !
In [5]: compte_version01([0,-3,-3,-3,9,9,4,11,1,1,1,7,4])
Out[5]: [1, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 5, 0, 1]
```

En effet, dans **entiers**, si l'on met des entiers négatifs, Python les transforme en entiers positifs car **L[-3]** est aussi **L[12-3]** soit **L[9]**. Et donc **-3** et **9** se cumulent dans la liste finale pour les occurrences.

Pour finir, tentons un cas où la liste n'a pas d'entiers.

```
In [9]: compte_version01(['t','r','o','p','c','o','o','l','!'])

Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-9-49fa973832ff>", line 1, in <module>
    compte_version01(['t','r','o','p','c','o','o','l','!'])
  File "<ipython-input-1-f64fa0b90630>", line 3, in
    compte_version01
    cpts = [0 for i in range(m+1)]
TypeError: can only concatenate str (not "int") to str
```

On voit qu'il faut faire autre chose. D'où la suite.

2. Cas général. On compte des éléments d'une liste qui ne sont pas en général des entiers, ils peuvent être des caractères par exemple. Au lieu de créer une liste `cpts`, on crée un dictionnaire `d`. En effet, dans un dictionnaire, les éléments sont indexés par ces clés qui peuvent être de n'importe quel type non mutable comme **tuple**. Les valeurs des éléments du tableau sont les clés du dictionnaire.

```
In [6]: def compte_version02(objet):
...:     d = {}
...:     for elt in objet :
...:         if elt in d:
...:             d[elt] = d[elt] + 1
...:         else:
...:             d[elt] = 1
...:     return d
```

Le mieux c'est faire fonctionner sur des exemples!

```
# Commençons par une liste d'entiers prise pour compte_version01
In [7]: compte_version02([0,3,4,11,1,1,1,7,4])
Out[7]: {0: 1, 3: 1, 4: 2, 11: 1, 1: 3, 7: 1}
```

```
# Reprenons la liste avec un entier negatif.
In [8]: compte_version02([0,-3,-3,-3,9,9,4,11,1,1,1,7,4])
Out[8]: {0: 1, -3: 3, 9: 2, 4: 2, 11: 1, 1: 3, 7: 1}
```

On voit que là `-3` est vraiment pris en compte indépendamment de 9.

```
# Essayons avec une liste de caracteres
In [10]: compte_version02(['t','r','o','p','c','o','o','l','!'])
Out[10]: {'t': 1, 'r': 1, 'o': 3, 'p': 1, 'c': 1, 'l': 1, '!': 1}
```

Et si l'on essaye directement avec une chaîne de caractères, donc un autre type que **list**.

```
In [11]: compte_version02('trop cool !')
Out[11]: {'t':1,'r':1,'o': 3,'p':1,' ': 2,'c':1,'l':1,'!':1}
```

On voit que ça marche mais les espaces sont occurencés aussi.
Finiissons par une chaîne plus farfelue.

```
In [14]: compte_version02('trop cool ! 1.045 j ecris nimporte
    quoi')
Out[14]: {'t': 2, 'r': 3, 'o': 5, 'p': 2, ' ': 7, 'c': 2, 'l': 1,
    '!': 1, '1': 1, '.': 1, '0': 1, '4': 1, '5': 1, 'j': 1, 'e': 2,
    'i': 3, 's': 1, 'n': 1, 'm': 1, 'q': 1, 'u': 1}
```

■ Recherche textuelle

Il s'agit maintenant de rechercher la présence ou l'absence d'un motif ou d'un mot dans un texte. Le texte ou le motif est représenté en Python par des chaînes de caractères (type **str**). Ils sont donc composés de caractères qui peuvent être des lettres, des signes de ponctuations, des symboles ou de l'espace. Si le motif est constitué d'un seul caractère, on est ramené au paragraphe de recherche de valeurs de ce chapitre et aux fonctions **recherche_V1** ou **recherche_V2**. Dans ce cas, on sait que le coût de la recherche est linéaire de valeur la longueur de la chaîne.

Nous allons donc construire une procédure nommée **recherche_motif** qui va être booléenne. On renvoie **True** si **motif** est bien dans **texte** et **False** sinon. Donnons la procédure :

```
In [7]: def recherche_motif(texte, motif):
    ...:     n = len(texte) ; m = len(motif)
    ...:     for j in range(n-m+1):
    ...:         i = 0
    ...:         while i < m and texte[j+i] == motif[i]:
    ...:             i = i + 1
    ...:         if i == m :
    ...:             return True
    ...:     return False
```

Exercice 04. Faire tourner à la main **recherche_motif** pour **texte = "premier essai"** et **motif = "er es"** puis **motif = "e es"**

```

In [8]: recherche_motif("premier essai", "er es")
Out[8]: True

In [9]: recherche_motif("premier essai", "e es")
Out[9]: False

# Un autre texte pour le fun !
In [10]: recherche_motif("on recherche super bien!", "super")
Out[10]: True
In [11]: recherche_motif("on recherche super bien!", "????")
Out[11]: False

```

Faisons une variante où on renvoie soit le premier indice de texte où motif apparaît, soit on renvoie que ce motif n'est pas dans le texte.

```

In [12]: def recherche_motif_V2(texte, motif):
...:     n = len(texte) ; m = len(motif)
...:     for j in range(n-m+1):
...:         i = 0
...:         while i < m and texte[j+i] == motif[i]:
...:             i = i + 1
...:         if i == m :
...:             return j, 'est premier indice de motif dans texte'
...:     return 'aucune inclusion de ce motif dans le texte'

In [13]: recherche_motif_V2("on recherche super bien!", "????")
Out[13]: 'aucune inclusion de ce motif dans le texte'

In [14]: recherche_motif_V2("on recherche super bien!", "super")
Out[14]: (13, 'est premier indice de motif dans texte')

```

Pour finir, parlons du coût. Notons n la longueur du texte et m celle du motif. La boucle **for** est parcourue $(n - m + 1)$ fois. Dans le pire des cas, la boucle interne **while** est parcourue au plus m fois pour tester chaque caractère du motif. Le nombre total de comparaisons entre caractères est donc majoré par $m(n - m + 1)$.

Chapitre 4

The bubble sort

■ Objectifs

Les incontournables :

savoir faire tourner le tri-bulles sur une liste donnée.

Et plus si affinités :

savoir utiliser une variable booléenne qui permette de sortir de la boucle d'un tri-bulles s'il n'y a pas eu de permutations à un parcours donné.

Cours

■ Introduction

Un problème classique est le triage de données. Il faut que les données soient comparables les unes aux autres. Le cas le plus simple est une liste d'entiers par exemple et la liste $[1, 5, 2, 4, 3, 1]$ peut se trier selon l'ordre croissant et donner $[1, 1, 2, 3, 4, 5]$ ou selon l'ordre décroissant $[5, 4, 3, 2, 1, 1]$. On peut remarquer dans cet exemple la présence de la même valeur deux fois. Certains tris vont permuer les deux 1 dans leurs exécutions et certains tris ne vont pas les permuer. On parle de tris stables ou de tris instables. Parmi les tris classiques stables, on peut citer le tri par insertion, le tri bulle (celui qui va nous intéresser dans ce chapitre), le tri Shaker, le tri Gnome et le tri fusion. Parmi les tris classiques instables, le tri par sélection, le tri à peigne, le tri rapide, le tri Shell et le tri maximier. Les longs week end pluvieux, vous pourrez vous pencher sur ces différents tris. Lequel choisir ? Ce qui est le plus important pour un tri c'est sa complexité qui est en rapport avec son temps d'exécution. Sachez que le meilleur de tous est le tri fusion. Nous reparlerons de la plupart de ces tris dans des chapitres ultérieurs. Maintenant passons au tri à bulles qui est celui qu'on va développer dans ce chapitre.

■ Tri à bulle

L'algorithme du tri à bulle consiste à parcourir une liste plusieurs fois jusqu'à ce qu'elle soit **triée du plus petit au plus grand**, en comparant à chaque parcours les éléments consécutifs et en procédant à leur échange s'ils sont mal triés.

Les étapes sont :

- on parcourt la liste et si deux éléments consécutifs sont rangés dans le désordre, on les échange ;

- si à la fin du parcours au moins un échange a eu lieu, on recommence l'opération ;

- sinon, la liste est triée, on arrête.

Notons que si les deux éléments sont identiques, aucune permutation n'est effectuée.

Les éléments les plus grands remontent ainsi dans la liste comme des bulles d'airs qui remontent à la surface d'un liquide. D'où le nom de tri-bulle.

Le mieux maintenant c'est un exemple. Soit la liste $L = [12, 17, 14, 11, 8]$. On écrira en gras les éléments permutés.

Parcours 1 : $[12, \mathbf{14}, \mathbf{17}, 11, 8]$ puis $[12, 14, \mathbf{11}, \mathbf{17}, 8]$ puis $[12, 14, 11, \mathbf{8}, \mathbf{17}]$

Parcours 2 : $[12, \mathbf{11}, \mathbf{14}, 8, 17]$ puis $[12, 11, \mathbf{8}, \mathbf{14}, 17]$

Parcours 3 : $[\mathbf{11}, \mathbf{12}, 8, 14, 17]$ puis $[11, \mathbf{8}, \mathbf{12}, 14, 17]$.

Parcours 4 : $[\mathbf{8}, \mathbf{11}, 12, 14, 17]$.

Parcours 5 : $[8, 11, 12, 14, 17]$.

Lors du parcours 5, aucune permutation n'est effectuée. La liste est donc triée.

Remarquons qu'au bout du parcours 1, le plus grand élément 17 est en fin de liste. Au bout du parcours 2, les deux plus grands éléments 14, 17 sont en fin de liste. Au bout du parcours 3, les trois plus grands éléments 12, 14, 17 sont en fin de liste. Et ensuite en fin de parcours 4, les quatre

plus grands 11, 12, 14, 17 sont en fin de liste. Et ici le plus petit (le cinquième élément) est déjà à sa place tout à gauche de la liste.

Exercice 01 Refaire le tri à bulle à la main sur la liste $[2, -1, 0, 4, 5, -1, 1]$

Cas le plus favorable pour un tri-bulle. Supposons une liste de n éléments déjà triée :

$$[1, 2, \dots, n - 1, n].$$

On effectue les $n - 1$ comparaisons de 1 avec 2 puis 2 avec 3 etc. et aucune permutation n'est nécessaire. C'est le cas le plus favorable.

Cas le plus défavorable pour un tri-bulle. Supposons que notre liste de départ soit

$$[n, n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 1].$$

La valeur n va se déplacer après chaque itération jusqu'à la fin de la liste. Donc le nombre de comparaisons puis de permutations pour la valeur n est $n - 1$.

De manière similaire, pour amener $n - 1$ à la bonne place, il faut $n - 2$ permutations (le dernier élément est n et donc $n - 1$ ne permutera pas avec lui).

Puis pour amener $n - 2$ à la bonne place, il faut $n - 3$ permutations (les deux derniers éléments sont $n - 1$ et n et ne sont pas touchés).

Ainsi de suite... jusqu'à $[2, 1, 3, 4, \dots, n - 1, n]$. L'élément 2 est juste comparé et permuté avec 1. Et ensuite on parcourt toute la liste une fois et on constate que plus rien ne permute.

Combien d'opérations avons nous fait ?

Pour les comparaisons et les permutations,

$$2((n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) = 2 \times \frac{n(n - 1)}{2} = n(n - 1).$$

Donc le nombre d'opérations est de l'ordre de grandeur de n^2 .

Pour définir la complexité d'un tri, on détermine celle du cas le plus défavorable. On dit ici que **la complexité de ce tri est quadratique**.

Remarque : il y a des tris plus performants. Par exemple la complexité du tri fusion est en $n \ln n$.

■ Mise en place du programme Python

Pour commencer, rappelons une commande utile pour la suite.

```
In [1]: a = 5
In [2]: b = 7
In [3]: a, b = b, a
In [4]: a
Out [4]: 7
In [5]: b
Out [5]: 5
```

Le code `a,b = b,a` permute `a` et `b`

Nous allons créer maintenant le programme `tri_bulles` d'argument `L` en se servant de la remarque qui suit l'exemple `[12,17,14,11,8]`. On procède à de moins en moins de comparaisons dans l'algorithme. On utilise donc une boucle rétrograde avec le code `range(b,a,-1)` qui liste les entiers de `b` à `a+1` avec `b` strictement supérieur à `a`

```
In [6]: def tri_bulles(L):
...:     n = len(L)
...:     for dernier in range(n-1,0,-1):
...:         for i in range(dernier):
...:             if L[i] > L[i+1]:
...:                 L[i],L[i+1] = L[i+1],L[i]
...:     return L

In [7]: tri_bulles([12,17,14,11,8])
Out[7]: [8, 11, 12, 14, 17]
```

Exercice 02 : faire fonctionner à la main `tri_bulles` avec `L = [3,0,-2,5,1]`

Revenons à l'algorithme principal. Ce tri ne permute `L[i]` et `L[i+1]` que si `L[i] > L[i+1]` et donc deux éléments de même valeur peuvent par des permutations successives se rapprocher et se retrouver côte à côte mais ne seront pas permutés. Le tri est donc bien stable. Si l'on remplace dans `tri_bulles` par `if L[i] >= L[i+1]`, on obtient le même résultat mais il peut y avoir davantage de permutations et le tri ne serait plus stable.

■ Une version améliorée de Tri-bulles

On va s'inspirer de `recherche_V1` du chapitre 3. Nous introduisons dans `tri_bulles` une variable booléenne `permut` indiquant lors de la fin d'un parcours si l'on a effectué une permutation. Si ce n'est pas le cas le tableau est trié et on peut sortir de la boucle qui fait les comparaisons.

Cette variable doit être réinitialisée à `False` à chaque début d'un parcours (car avant de commencer un parcours, on n'a encore réalisé aucune permutation sur ce parcours).

Par ailleurs, ici la boucle `for` devient une boucle `while` car plus adaptée. Ce qui permet dans la condition de `while` de mettre le test d'arrêt suivant : si `permut` reste `False` donc il n'y a eu aucune comparaison, alors la boucle `while` ne fonctionne plus et on retourne `L`.

On tape donc `while dernier >= 1 and permut`: et la boucle ne fonctionnera tant que `dernier` n'est pas nul et tant que `permut` est vraie.

Enfin, `permut` est initialisé à `True` car sinon on n'effectuera aucun parcours.

```
In [9]: def new_tri_bulles(L):
...:     n = len(L)
...:     dernier = n-1
...:     permut = True
...:     while dernier >= 1 and permut:
...:         permut = False
...:         for i in range(dernier) :
...:             if L[i] > L[i+1]:
...:                 L[i],L[i+1] = L[i+1], L[i]
...:                 permut = True
...:         dernier -= 1
...:     return L
```

Chapitre **5**

Modules and library

■ Objectifs

Les incontournables :

Connaître le nom des modules ou bibliothèques les plus utiles qui sont : **numpy**, **numpy.linalg**, **matplotlib.pyplot** et **random**

Savoir créer un alias pour un module ou une bibliothèque (par exemple **import matplotlib.pyplot as plt**).

Savoir utiliser la commande **dir**.

Connaître la différence entre importer tout un module (par exemple **from math import ***) et certaines fonctions d'un module (par exemple **from math import sin, cos**)

Comment nommer une fonction d'un module importé par son nom (par exemple **rd.randint** appelle la fonction **randint** du module **random** ramené à son alias **rd**).

Et plus si affinités :

Connaître le module **time** et sa fonction **perf_counter** qui affiche le temps d'exécution.

Connaître le module **sympy** qui permet le calcul formel.

Connaître la bibliothèque **scipy** et son module **scipy.stats** qui fournit les lois classiques de probabilité.

Cours

■ Introduction

Il est conseillé de décomposer un programme en particulier à l'aide de fonctions. Lorsque des fonctions traitent toutes d'un même sujet, on peut les regrouper dans un fichier, un module. Différents modules peuvent être regroupés dans une bibliothèque. Un programme en Python commence souvent par des lignes contenant le mot **import** afin d'utiliser des modules et des bibliothèques (**library** en langage Python).

■ Création d'un module

Pour créer un module qui est un simple fichier, il suffit donc d'écrire les définitions de fonctions et de constantes dans un fichier dont le nom a l'extension **py**. Il est important de fournir une documentation qui indique la façon de les utiliser et ce qu'elles produisent.

Exemple 01. Nous allons créer un fichier qui se nomme **aires.py**, fichier dans lequel on précise la valeur utilisée pour le nombre π et les définitions de quelques fonctions permettant de calculer des aires.

On tape dans l'éditeur :

```
pi = 3.14159
def disque(rayon):
    """rayon de type float est le rayon d'un disque"""
    """et renvoie l'aire du disque """
    return pi*rayon*rayon
def rectangle(largeur, longueur):
    """largeur et longueur sont de type float"""
    """renvoie aire rectangle de cotes largeur et longueur"""
    return largeur * longueur
def triangle(base, hauteur):
    """base et hauteur de type float sont la base et la
    hauteur d'un triangle"""
    """renvoie l'aire du triangle"""
    return base*hauteur/2
```

On nomme ce fichier **aires.py**. On a ainsi créé un module appelé **aires**. Puis on sort de ce fichier et on se met dans un nouveau fichier vierge de l'éditeur. Puis toujours dans l'éditeur, on tape :

```
import aires
# On appelle ainsi le module aires
print(aires.disque(10))
print(aires.rectangle(30,4))
```

Puis on clique sur **run** et alors dans la console apparaît :

```
In [1] : runfile('C:/Users/damin/.spyder-py3/untitled0.py', wdir='
C:/Users/damin/.spyder-py3')
Reloaded modules: aires
314.159
120
```

Le point entre **aires** et **disques** signifie que l'on se réfère au nom **disque** qui est défini dans le module **aires**.

On accède à la spécification d'une fonction avec la fonction **help**.

```
In [2]: help(aires.disque)
Help on function disque in module aires:

disque(rayon)
    "rayon de type float est le rayon d'un disque"
```

Le contenu de tout le module **aires** s'obtient avec la fonction **dir**

```
In [3]: dir(aires)
Out [3]:
['__builtins__',
'__cached__',
'__doc__',
'__file__',
'__loader__',
'__name__',
'__package__',
'__spec__',
'aires',
'disque',
'pi',
'rectangle',
'triangle']
```

■ Résumé des commandes pour manipuler les modules

Comment charger un module ou une fonction d'un module ?

Soit un module générique que nous appellerons **package**. Il contient toutes les expressions et fonctions python définis dans le fichier **package.py**

Pour importer **package** ou des fonctions ou des classes incluses dans **package**, on applique une des règles suivantes.

import package : accès à la fonction **fonction** de **package** en tapant **package.fonction**

import package as pa : permet de définir l'alias **pa** de **package**. Ainsi on tape maintenant

`pa.fonction` pour aller chercher `fonction` du module `package`.

`from package import *` : permet de charger toutes les fonctions de `package` et pour aller chercher `fonction`, on ne tapera plus `pa` ou `infopackage` devant.

`from package import fonction` : ne charge que `fonction` et pas le reste du module `package`.

Par extension, `from package import fonction1 , fonction2 , fonction3` : chargera les trois fonctions citées de `package` et rien d'autre.

Parfois la fonction qui nous intéresse est dans un `sous-package` d'un module principal `package`

On tape `import package.sous-package as sp` ou `from package.sous-package import fonction` par exemple pour l'utiliser.

Comment s'informer sur le contenu d'un module ou sur une fonction d'un module ?

Comme on a vu plus haut sur l'exemple 01, `dir` liste les modules ou fonctions déjà chargés à un moment donné.

`dir(package)` liste les fonctions et constantes du module `package`.

`infohelp(package)` renvoie des informations sur les fonctions du module `package`

`help(package.fonction)` renvoie des informations sur `fonction` du module `package`.

Donnons maintenant les modules incontournables auxquels on en ajoute quelques uns qui sont intéressants pour que le candidat aux concours soit plus efficace et plus rapide.

■ Une liste de modules ou bibliothèques classiques prédéfinis par Python

Comment différencier un module ou une bibliothèque ? En fait, une bibliothèque est une collection de modules. On les reconnaît car on peut atteindre des modules que ces bibliothèques contiennent avec un attribut. Ainsi si `BIBLIO` est la bibliothèque, `BIBLIO.MOD1` est le module `MOD1` inclus dans `BIBLIO`. À l'appel de `BIBLIO.MOD1`, on peut alors récupérer des fonctions de ce module.

Enfin, `BIBLIO` peut contenir directement des fonctions et être considéré comme un de ses modules.

1. La bibliothèque `numpy`

La bibliothèque `numpy` permet de faire du calcul scientifique et de manipuler des tableaux. C'est la library que l'on utilisera le plus. Son alias usuel est `np`.

Le module de `numpy` utilisé principalement est `linalg`, consacré à tout ce qui est calcul matriciel.

On l'importe avec : `import numpy.linalg as alg` et donc son alias usuel est `alg`

Exemple 02 Utilisons `numpy` pour résoudre :
$$\begin{cases} 10^{-20}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} .$$

```
In [1] : import numpy as np ; import numpy.linalg as alg

In [2] : A = np.array([[10**(-20), 1],[1,1]])
In [3] : B = np.array([[1],[2]])

In [4] : alg.solve(A,B)

Out [4] :
array([[1.],[1.]])
```

Notons aussi le module `polynomial`, utile comme son nom l'indique, pour le calcul polynomial. On l'importe avec `from numpy.polynomial import Polynomial` et donc son alias usuel est `Polynomial`.

2. Le module `math`

Le module `math` contient les principales fonctions et constantes mathématiques usuelles. Son alias classique est `mt` et rappelons que l'on peut obtenir des informations sur une fonction particulière à l'aide de la fonction `help`

Exemple 03 Parmi les fonctions de `math`, on remarque la fonction `hypot`. Que fait cette fonction ? Utilisons `help`

```
In [9]: help(math.hypot)
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-9-f28b798b5134>", line 1, in <module>
    help(math.hypot)
NameError: name 'math' is not defined
In [10]: # Normal il n'y a pas le module math. Je suis IDIOT !
In [11]: import math
In [12]: help(math.hypot)
Help on built-in function hypot in module math:

hypot(...)
    hypot(*coordinates) -> value

    Multidimensional Euclidean distance from the origin to a
    point.

    Roughly equivalent to:
        sqrt(sum(x**2 for x in coordinates))

    For a two dimensional point (x, y), gives the hypotenuse
    using the Pythagorean theorem: sqrt(x*x + y*y).

    For example, the hypotenuse of a 3/4/5 right triangle is:
    >>> hypot(3.0, 4.0)
    5.0
```

On a compris, la fonction `hypot(x,y)` renvoie la longueur de l'hypothénuse sachant que x et y sont les longueurs des côtés adjacent et opposé d'un triangle rectangle.

3. Le module `cmath`

Le module `cmath` permet d'utiliser certaines commandes relatives aux nombres complexes. Il possède beaucoup de fonctions en commun avec `math`. À vous de fouiller (un jour pluvieux).

4. Le module `sympy`

Le module `sympy` permet de faire du calcul formel, c'est-à-dire de manipuler des symboles et des expressions littérales, sans utiliser des valeurs numériques. C'est un module qui mérite d'être connu car il peut être très utile par exemple pour avoir l'expression littérale d'une dérivée ou d'une primitive exacte. À utiliser pour vérifier un calcul. On peut même l'utiliser pour résoudre des systèmes linéaires à paramètre (chronophage dans une colle de maths donc si la machine le fait pour vous c'est mieux).

Exemple 04. Utilisons **sympy** pour résoudre ($m \in \mathbb{R}$) :
$$\begin{cases} x + my + z & = & 1 \\ x + y + mz & = & 0 \\ 7x + (4 + m)y + (3 + 2m)z & = & -1 \end{cases} .$$

```
In[1] : from sympy import *
In[2] : m = symbols('m'); x = symbols('x'); y = symbols('y'); z
        = symbols('z')
In[3] : syst = Matrix([[1, m, 1, 1], [1, 1, m, 0], [7, 4+m, 3+2*m, -1]])
In[4] : solve_linear_system(syst, x, y, z)
Out[4] :
{ z : (m-2)/(2*m*(m-1)), x : -(m+2)/(2*m) ,
  y : (3*m-2)/(2*m*(m-1)) }
```

On trouve les solutions exactes en fonction de m (mais on occulte le cas $m = 0$ ou $m = 1$).

$$x = \frac{-(m+2)}{2m}, y = \frac{3m-2}{2m(m-1)}, z = \frac{m-2}{2m(m-1)}.$$

Exemple 05 On veut calculer $\int_0^1 e^{-x} dx$ en utilisant **integrate** de **sympy**

```
In[5] : from sympy import *
In[6] : x = symbols('x'); integrate(exp(-x), (x, 0, 1))
Out[6] :
- exp(-1)+1
```

5. La bibliothèque **scipy**

La bibliothèque **scipy** permet elle aussi de faire du calcul scientifique. On utilise principalement deux de ses modules. On les importe en utilisant leurs alias. On tape **import scipy.optimize as resol** et **import scipy.integrate as integr**

Exemple 05 bis On veut calculer $\int_0^1 e^{-x} dx$ en utilisant **quad** de **scipy.integrate** défini par son alias **integr**

```
In[7] : import math as mt; import scipy.integrate as integr
In[8] : def f(t) : return mt.exp(-t)
In[9] : integr.quad(f, 0, 1)
Out[9] :
(0.6321205588285578 , 7.017947987503856e-15)
```

On remarque que l'on obtient deux flottants, le premier correspond à une valeur approchée de $-e^{-1} + 1$ et le second une majoration de l'erreur commise en prenant cette valeur approchée à la place de $-e^{-1} + 1$.

Ainsi avec **sympy** on a de l'intégration formelle c'est-à-dire que l'on trouve la valeur exacte (si bien entendu c'est possible) et avec **scipy**, on a de l'intégration numérique.

D'ailleurs un TP d'info sera consacré plus tard à l'intégration numérique et notamment aux formules des rectangles ou des trapèzes.

6. Le module Turtle

C'est un module amusant. Il sert par exemple à dessiner des fractals notamment la dragon curve (courbe du dragon) ou le Schneeflocke (flocon de neige) de Von Koch qui sont des répétitions de motifs géométriques et seule la capacité de la machine nous arrête dans l'élaboration du dessin. Ce sont des programmes récursifs donc on ne va pas s'y attarder dans ce chapitre. Donnons simplement un exemple de manipulation de ce module.

Exemple 06. *Comment dessiner un pentagone avec `turtle` ?*
On prendra `longcot` pour mesure d'un côté.

```
In [1]: from turtle import *

In [2]: def pentagone(longcot):
...:     for i in range(5):
...:         forward(longcot)
...:         left(72)
In [3]: pentagone(200)
```

On commence par appeler le module `turtle` puis on commence par faire un premier côté de longueur `longcot` (on prendra 200 pour valeur numérique). C'est la fonction `forward(longcot)`. Puis on tourne de 72 degrés vers la gauche. C'est la commande `left(72)`. Pourquoi 72? Car $72 * 5 = 360$. On fait cela 5 fois et on obtient le pentagone voulu qui se place dans une fenêtre de Python Turtle Graphics.

Donnons deux autres commandes classiques (pas utiles pour le pentagone). Par exemple `right(30)` va déplacer le curseur de 30 degrés vers la droite, `backward(150)` va faire reculer le curseur de 150. Il y a plein d'autres fonctions (pour créer de la couleur, augmenter ou diminuer l'épaisseur du trait, pour cacher la tortue ou la montrer etc.)

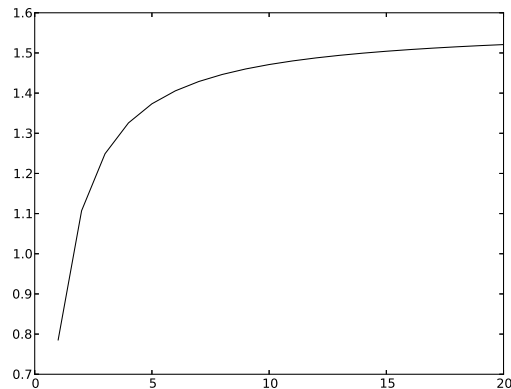
7. La bibliothèque matplotlib

La bibliothèque `matplotlib` permet de faire du graphisme (tracé de courbes en particulier). C'est la bibliothèque la plus importante à connaître avec `numpy`. On importe son module principal important `pyplot` avec l'instruction : `import matplotlib.pyplot as plt` et l'alias est donc `plt`.

Exemple 07. *Écrire les lignes Python qui permettent de tracer la ligne de segments brisés passant par les points $(k, f(k))$, où k varie de 1 à 20. Appliquer et afficher avec $f : x \mapsto \arctan x$.*

```
In[4] : import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy as np
In[5] : def f(x) : return(np.arctan(x))
In[6] : X = [ k for k in range(1,21) ]
In[7] : Y = [ f(k) for k in range(1,21) ]
In[8] : plt.plot( X,Y, color = '0' ); plt.show( )
```

On obtient la courbe suivante.



8. La bibliothèque random

La bibliothèque **random** permet en fait de générer des nombres aléatoires. On l'importe en totalité avec : `import random as rd` pour utiliser ses fonctions directement accessibles.

- `rd.randint(a,b)` permet de choisir un entier au hasard dans $[[a, b - 1]]$.
- `rd.random()` renvoie un réel dans $[0, 1[$.

Exemple 08. *Création d'une variable de Bernoulli de paramètre p .*

*Écrire une fonction **lancer(p)** qui renvoie **True** avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et **False** avec une probabilité $q = 1 - p$. On utilisera la fonction `rd.random()` et faire quelques essais.*

```
In [16]: import random as rd
In [17]: def lancer(p):
...:     return rd.random()<p
...:
In [18]: lancer(0.9),lancer(0.9999),lancer(0.0001)
Out[18]: (True, True, False)
In [19]: lancer(0.4),lancer(0.4),lancer(0.4)
Out[19]: (True, True, True)
In [20]: lancer(0.4),lancer(0.4),lancer(0.4)
Out[20]: (False, False, True)
```

Il faut savoir que **numpy** en tant que bibliothèque possède un module **random** que l'on nommera donc **numpy.random** qui n'est pas exactement le même module que **random** ici. Le module **numpy.random** de **numpy** permet d'aller plus loin. Ainsi, la fonction **randint** de **numpy.random** possède un troisième argument qui permet la répétition.

```
In [21]: import numpy.random as rd
In [22]: rd.randint(0,2,4)
Out[22]: array([0, 1, 1, 1])
```

Ce module **numpy.random** possède aussi des fonctions simulant les lois de probabilité classiques : `rd.binomial(n,p)`, `rd.poisson(p)` etc.). Ce sera à approfondir en TSI2.

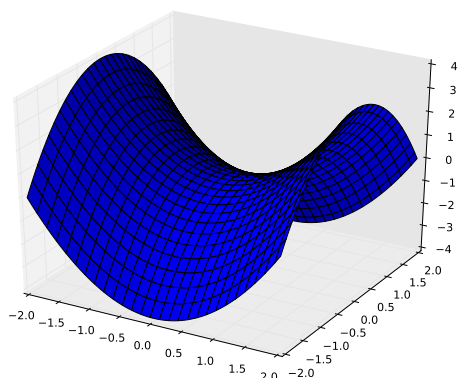
9. Le module `mpl_toolkits.mplot3d`

Le module `mpl_toolkits.mplot3d` permet des tracés en dimension 3.

La fonction la plus utile est `Axes3D` et on l'importe avec `from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D`. Remarquons que `mpl_toolkits.mplot3d` par sa syntaxe est un module de la bibliothèque `mpl_toolkits` mais c'est le seul module de cette bibliothèque qui peut nous intéresser à notre niveau.

Exemple 09. Tracer la surface $z = x^2 - y^2$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$ avec un pas $h = 0.015$.

```
In [23]: import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
In [24]: from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
In [25]: def f(x,y) : return x**2 - y**2
In [26]: X = np.arange(-2,2,0.015); Y = np.arange(-2,2,0.015);
In [27]: X,Y = np.meshgrid(X,Y); ax = Axes3D(plt.figure())
In [28]: Z = f(X,Y); ax.plot_surface(X,Y,Z); plt.show( )
```



10. Le module `time`

Le module `time` gère tout ce qui concerne le temps d'exécution. Il permet de connaître le temps mis pour l'exécution d'une procédure donnée. Quand vous aurez vu les fonctions récursives, ce module permettra de comparer le temps mis pour faire un calcul de façon récursive plutôt qu'itérative (avec une boucle `for`). Ce module peut illustrer aussi la comparaison entre une procédure en $O(n)$ et celle en $O(n^2)$ (voir le prochain chapitre). La fonction utile de `time` est `perf_counter`. Le mieux c'est donner un exemple.

Exemple 10. Soit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Écrivons une procédure `Fibo1` qui à partir de l'entier n renvoie F_n , en utilisant directement la relation de récurrence et de façon itérative. Appliquons pour $n \in \llbracket 1, 14 \rrbracket$. Écrivons ensuite une procédure `Fibo2` qui à partir de l'entier n renvoie F_n , en utilisant directement la relation de récurrence et de façon récursive. Appliquons pour $n \in \llbracket 1, 14 \rrbracket$. Ensuite, comparons le temps d'exécution dans les deux cas pour $n = 20$ avec le module `time`.


```

In [1]: def Fibo1(n) :
        if n == 0 or n == 1 :
            return 1
        else :
            u , v = 0 , 1
            for j in range(n-1):
                u , v = v , u+v
            return v
# On fait fonctionner.
In [2]: [Fibo1(i) for i in range(1,15)]
Out [2]:
        [1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610]

```

```

In [3]: def Fibo2(n) :
        if n <= 1 :
            return 1
        else :
            return(Fibo2(n-1)+Fibo2(n-2))
# On fait encore une fois fonctionner.
In [4]: [Fibo2(i) for i in range(1,15)]
Out [4]
        [1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610]

```

Rien à dire, c'est pareil niveau résultat. Mais niveau temps d'exécution c'est pas pareil. On commence à charger **perf_counter** avec **pc** pour alias. On visualise la valeur trouvée pour 20 avec **print** mais ce n'est pas obligatoire. Puis on tape **t = pc()** puis on tape le code d'exécution ici **Fibo1(20)** pour le premier et on tape ensuite **print(pc()-t)** qui va afficher le temps mis pour l'exécution.

```

In [5]: from time import perf_counter as pc
In [6]: print(Fibo1(20))
In [7]: t = pc( ); Fibo1(20); print(pc( ) - t)
Out [7]
        10946
        0.00014680592257036197

In [8]: print(Fibo2(20))
In [9]: t = pc( ); Fibo2(20); print(pc( ) - t)
Out [9]:
        10946
        0.0184203504243996

```

Fibo2(20) met 126 fois plus de temps que **Fibo1(20)**. Essayer avec 200 à la place de 20 et ce sera pire!

11. Le module decimal

Un dernier module pour la route. En fait, on vous donne ce module car il peut être pratique. Dans certains programmes, on peut avoir des soucis d'arrondis. Cela se traduira par un résultat obtenu faux s'il y a eu plusieurs étapes d'arrondis pour obtenir ce résultat. Pour contrer cela, on peut imposer plus de chiffres après la virgule. Donnons un exemple.

```
In [17]: import decimal

In [18]: D = decimal.Decimal

In [19]: decimal.getcontext().prec = 40

In [20]: print(1/7)
0.14285714285714285

In [21]: print(D(1)/D(7))
0.1428571428571428571428571428571428571429
```

Comme on a toujours voulu connaître plein de décimales de π ou de e (la constante de Neper), avanti!

```
In [26]: import math as mt
In [27]: print(mt.pi)
3.141592653589793
In [28]: print(mt.e)
2.718281828459045

In [29]: print(D(mt.pi))
3.141592653589793115997963468544185161590576171875

In [30]: print(D(mt.e))
2.718281828459045090795598298427648842334747314453125
```

Et maintenant, sur Internet, on va chercher les décimales de π jusqu'à 50 décimales par exemple.

Pi = 3. 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510

Et on voit qu'après la 15^{ème} décimale, `print(D(mt.pi))` renvoie un résultat faux. Il faut savoir que le module `math` ne connaît les constantes usuelles dont π et e qu'avec 15 décimales. Et `decimal` retourne donc un résultat faux si l'on veut mieux.

Chapitre **6**

Integer representation

■ Objectifs

Les incontournables :

savoir

Et plus si affinités :

Cours

■ Introduction

Toutes les données utilisées dans une machine sont numérisées, c'est-à-dire transformées en une succession de 0 et de 1. Par exemple le code ASCII (qui signifie American Standard code for Information interchange) utilisé dans les claviers emploie cette technique. Par exemple l'écriture 01100001 représente le nombre 97 mais aussi la lettre "a" ou encore une quantité de rouge dans une image en couleur. L'écriture 10000000 représente le nombre 128 mais aussi le symbole euro et aussi la numérotation HTML € Rappelons que HTML est utilisé pour créer et représenter le contenu d'une page web et sa structure.

Signalons que le zéro exprime le vide ou l'absence et permet de distinguer par exemple 35 de 305. Mais ASCII a un inconvénient car il est limité à $2^8 = 256$ caractères. On s'arrête à 11111111. Ainsi, ce code ne peut pas être utilisé pour représenter du texte dans de nombreuses langues. On utilise alors des codes plus étendus comme Unicode qui a 2^{16} ou 2^{32} caractères.

■ Vocabulaire

Les deux chiffres 0 et 1 sont appelés des **bits**, mot qui vient de l'anglais « binary digit ».

Une suite de 0 et de 1 est appelé un **mot**.

Un mot de 8 bits est un **octet** ou **byte** (donc à ne pas confondre avec bit)

Avec seize bits, donc deux octets, on parle de **word** et avec 64 bits de **qword**. Mais la nomenclature évoluant, dans les machines récentes, un word a une taille de 64 bits. Ce n'est plus un qword.

■ Écriture d'un nombre en binaire, addition de deux nombres en binaire

On l'a compris, un nombre écrit avec des bits c'est le système binaire.

Avant de rentrer dans le monde merveilleux du système binaire, rappelons que nous nous vivons depuis l'école primaire plutôt dans le système décimal. Et c'est vraiment naturel pour nous. Ainsi si l'on prononce trois cent cinquante sept c'est

$$357 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 7$$

Donc on le prononce presque comme on écrit sa décomposition dans le système décimal.

De façon général, le nombre $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$ s'écrit :

$$c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \dots + c_1 10 + c_0$$

Le système décimal est appelé aussi base 10. On utilise 10 chiffres qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

On peut généraliser à la base b où b est un entier supérieur ou égal à 2.

$$(c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_b = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \dots + c_1 b + c_0$$

Ici les chiffres c_0, \dots, c_n sont des entiers de 0 à $b - 1$ si $b \leq 10$.

Ainsi le nombre 180 dans le système décimal est $(2301)_4$ dans le système de base 4 car on a l'égalité : $2 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 0 \times 4 + 1 = 180$

Remarque : Un nombre quelconque dans le système décimal devrait se noter $(c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_{10}$ mais on écrit toujours $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$ à moins qu'on manipule aussi d'autres systèmes de bases différentes et il faut alors distinguer les écritures.

Une difficulté est dans le cas où $b \geq 11$ par exemple dans le cas classique $b = 16$ qui est le système hexadécimal. On complète alors les chiffres de 0 à 9 avec les lettres A, B, C, D, E, F et on a le compte.

Le système binaire est devenu le système de référence et comme il est facile de passer (comme on va le voir ci-dessous) de l'écriture en binaire à l'écriture dans des systèmes de base 2^p avec p entier, ces derniers se sont multipliés, le plus connu étant le système de base 2^4 , appelé système hexadécimal.

D'ailleurs dans un tableau de code ASCII, tous les nombres en écriture décimale de 0 à 255 apparaissent aussi en binaire et en hexadécimal.

Exercice 01 Écrire $(101011)_2$ en base 4 puis en base 8 puis en base 16.

Comment passer du système décimal au système binaire ?

On voit qu'il est facile de passer du système binaire au système décimal. Qu'en est-il de l'opération réciproque ? L'idée vient du système décimal.

Prenons par exemple 5326 écrit en base 10 et faisons les divisions euclidiennes successives par 10 des quotients obtenus jusqu'à arriver à un quotient nul et en notant à chaque étape le reste obtenu.

quotient	532	53	5	0
reste	6	2	3	5

En reprenant à l'envers les restes, on obtient les chiffres de 5326.

Appliquons la même chose en binaire. Prenons 11 écrit dans le système décimal et faisons les divisions euclidiennes successives par 2 des quotients obtenus jusqu'à arriver à un quotient nul et en notant à chaque étape le reste obtenu.

quotient	5	2	1	0
reste	1	1	0	1

Ainsi on obtient $(1011)_2$

Exercice 02 Soit le nombre en système décimal 31. L'écrire en binaire

Dans l'écriture d'un nombre en binaire, par exemple $(101110)_2$ le bit le plus à gauche (ici 1) est appelé **bit de poids fort**

Et le bit le plus à droite (ici 0) est appelé **bit de poids faible**.

Comment ajouter deux nombres écrits dans le système binaire ?

On peut poser l'addition comme on le fait en base 10 avec le système de retenue.

On utilise les résultats : $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ et $1 + 1 = 10$.

Par exemple ajoutons $(1101)_2$ et $(1001)_2$.

	1	1	0	1	Nombre 1
+	1	0	0	1	Nombre 2
	1		1		retenues
	1	0	1	1	0
					Somme

Exercice 03 *Sommer les deux nombres $(11101001)_2$ et $(100011)_2$ en binaire*

Comment multiplier par 2 puis par 2^n un nombre écrit dans le système binaire ?

Multiplier par 2 signifie multiplier par $(10)_2$.

Commençons par l'exemple $(1011)_2 \times (10)_2$ et passons à leurs écritures avec les puissances de 2.

$$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \text{ et } (10)_2 = 1 \times 2^1$$

Alors : $(1011)_2 \times (10)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 = (10110)_2$

Ainsi, on ajoute un zéro à droite du nombre de départ ici $(1011)_2$

On peut généraliser si l'on multiplie par 2^n (écrit dans le système décimal). Or si l'on applique la règle précédente, comme 2 est $(10)_2$ en binaire, 2^n est $(1000\dots 0)_2$ en binaire (il y a n zéros)

En conclusion soit le nombre $(c_p c_{p-1} \dots c_1 c_0)_2$ et multiplions le par 2^n (écriture en base 10). Alors on obtient $(c_p c_{p-1} \dots c_1 c_0 0 \dots 0)_2$, où il y a n zéros à droite du nombre.

Remarque : Cette règle est aussi vraie en base b quelconque. Le produit d'un nombre écrit en base b par l'écriture en base b de b^n s'obtient en rajoutant à droite des chiffres de ce nombre une succession de n zéros.

Comment multiplier deux nombres écrits dans le système binaire ?

Donnons un exemple en multipliant $(100011)_2$ par $(11)_2$

L'idée est de remarquer que $(11)_2$ est $2^1 + 2^0$ en base 10 et donc il suffit d'ajouter le produit de $(100011)_2$ par $(10)_2$ avec $(100011)_2$, c'est-à-dire de faire $(1000110)_2 + (100011)_2$

1	0	0	0	1	1	0	Nombre 1
+	1	0	0	0	1	1	Nombre 2
			1	1			retenues
1	1	0	1	0	0	1	Somme

Exercice 04 *Faire le produit de $(1001)_2$ par $(111)_2$ en binaire*

Pour finir ce paragraphe, **un peu de culture**. C'est Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) qui est considéré à l'origine du développement du système binaire pour lequel il a précisé comment calculer les quatre opérations de base.

Certains des premiers ordinateurs calculaient en utilisant l'écriture décimale. C'est à partir de John Von Neumann (1903-1957) dans les années 1940 que le calcul en binaire est devenu la norme.

■ Mots de taille fixe. Représentation en machine

Nous avons l'habitude décrire des nombres comme 8, 17, 235, 7813. Si nous décidons d'utiliser exactement 4 chiffres pour représenter un nombre dans le système décimal, cela donnerait pour la série de nombres précédents 0008, 0017, 0235, 7813 Les entiers naturels représentables avec quatre chiffres sont alors tous les entiers de 0 (soit 0000) à 9999

La mémoire d'une machine ressemble à une feuille de papier quadrillée sur laquelle nous pouvons écrire un chiffre 0 ou 1 dans chaque petit carré. Chaque carré a une adresse.

Pour stocker les nombres en machines, il faudrait inscrire les chiffres de chaque nombre et pour chaque nombre, son nombre de chiffres. Sinon, il est impossible de savoir ce que représente $(101111)_2$ écrit sur une ligne de la feuille.

1	0	1	1	1
---	---	---	---	---

Ce sont les nombres $(1011)_2$ et $(1)_2$, les nombres $(101)_2$ et $(11)_2$? De plus, si un nombre occupe deux cases et que nous n'avons plus besoin de ce nombre, nous pouvons l'effacer mais nous ne disposons que de deux cases consécutives pour écrire un nouveau nombre. Il est donc plus efficace de décider que tous les nombres sont stockés avec exactement le même nombre de chiffres. Par exemple, si nous décidons d'utiliser des mots de taille quatre bits alors 1, 3, 5, 11 s'écrivent respectivement 0001, 0011, 0101 et 1011 Passons au tableau :

1	0	1	1	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

On a les deux nombres $(1011)_2$ et $(1)_2$ sans ambiguïté possible. Avec quatre bits, on peut écrire seulement 16 nombres et avec un octet, c'est $2^8 = 256$ (par exemple le code ASCII et c'est donc suffisant pour le codage d'un clavier d'ordinateur). Les calculs étant effectués par un processeur, la taille des mots est liée à la capacité du processeur. Actuellement les calculs avec des nombres sur 64 bits sont courants. Le langage Python gère des entiers plus longs et leur taille n'est limitée que par la capacité de la mémoire.

Représentation en machine

Un entier naturel s'écrit sans signe et on parle **d'entier non signé**.

Dans une machine, si l'on utilise 16 bits soit deux octets pour représenter un entier naturel, on peut aller jusqu'à 65535 ou encore $(1111\ 1111\ 1111\ 1111)_2$ et dans ce cas, 45 est représenté par le nombre $(0000\ 0000\ 0010\ 1101)_2$

Avec n bits, on peut représenter un nombre entre 0 et $2^n - 1$, c'est-à-dire tout nombre de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \text{ avec } b_i \in \{0, 1\}. \text{ On a dit qu'en général, on prend } n = 64.$$

■ Entiers signés

Considérons un ordinateur qui utilise des nombres écrits avec quatre chiffres et donc on peut représenter 10000 nombres par des mots de 0000 à 9999. Si nous souhaitons représenter des nombres négatifs, nous pouvons envisager plusieurs possibilités.

On pourrait représenter les nombres par +0000 à +9999 et donc ajouter -0000 à -9999 mais on utilise un symbole de plus et comme on ne peut utiliser que quatre cases pour un nombre, il n'en reste que trois pour la valeur absolue du nombre. De plus il y a deux zéros.

Une autre possibilité serait de translater tous les nombres N de -5000 à 4999 par $N + 5000$. Une difficulté majeure avec ce choix est alors de programmer des opérations.

Tentons autre chose qui reprend un peu cette idée.

Si nous effectuons $9999 + 0001$ en éliminant le bit de retenue, nous obtenons 0000 ce qui donne aussi $0000 - 0001 = 9999$

Ainsi on a aussi $0000 - 0002 = 9998$ etc.

comme 0000 est le neutre pour l'addition, on peut donc assimiler -0001 et 9999 puis -0002 et 9998 etc.

Et tous les nombres positifs sont alors représentés par les nombres de 0000 à 4999 et les négatifs par les nombres de 5000 à 9999. Tous les nombres commençant par 5, 6, 7, 8, 9 sont négatifs et représentent les entiers de -5000 à -1. Alors les négatifs N sont représentés par $N + 10^4$.

Ce type de représentation est celui utilisé avec les angles sur le cercle trigonométrique gradué de degré en degré. Les angles de -180 à 179 représentent les angles de 0 à 359.

Représentation en complément à 10^4 pour un entier en base 10

Supposons que l'on ne puisse utiliser que quatre chiffres pour distinguer les entiers. Si tous les entiers sont non signés, on va de 0000 à 9999. Si par contre, on doit signer les entiers, appliquons la méthode suivante.

On remplace chaque chiffre c de l'entier par le chiffre $9 - c$ et on ajoute ensuite 1 à ce nombre.

Le nombre 0000 se transforme en 10000, c'est-à-dire encore 0000 et donc $-0000 = 0000$

Le nombre 0001 se transforme en 9999, on a $0001 + 9999 = 0000$ et donc $-0001 = 9999$

Le nombre 0002 se transforme en 9998, on a $0002 + 9998 = 0000$ et donc $-0002 = 9998$, etc.

Le nombre 4999 se transforme en 5001, on a $4999 + 5001 = 0000$ et donc $-4999 = 5001$

Ainsi si r est un entier positif, $10^4 - r$ vaut $-r$ (pour une limitation à 4 chiffres).

Remarque : on peut faire une représentation en complément à 10^5 pour un entier en base 10 dans le cas où on ne retient que les nombres à 5 chiffres etc.

Exercice 05 Écrire l'opposé de 347101 dans une représentation en complément à 10^6 en base 10

Représentation en complément à 2 pour un entier dans le système binaire

De manière générale avec n bits (donc on écrit les nombres avec de 0 et des 1), la représentation en machine de l'opposé de l'entier r est $2^n - r$ car 2^n est 0000...000 (avec n zéros). Cette représentation est le complément à 2^n , souvent abrégé en complément à 2.

Dans la pratique, on remplace chaque chiffre c par le chiffre $1 - c$ (c'est-à-dire que l'on inverse les bits) et on ajoute 1. Attention, la taille est limitée à n bits.

Exemple : On prend une taille de six bits et on veut le codage de -12 (dans le système décimal). Pour commencer, on écrit 12 dans le système binaire. On obtient $(1100)_2$ que l'on écrit 001100. Puis on inverse chaque bit, on a 110011 et on ajoute 1 ou plutôt 000001, ce qui donne 110100 qui est la représentation de -12 en complément à deux sur 6 bits.

Exercice 06 Déterminer l'opposé de l'entier en binaire : $(111011)_2$ avec une représentation en complément à deux sur 8 bits

Examinons la capacité de ce système. Avec n bits, on peut représenter les nombres compris entre -2^{n-1} et $2^{n-1} - 1$. Les nombres négatifs ont tous le bit de poids fort égal à 1. En effet 2^{n-1} est 100...000 avec $n - 1$ zéros

L'opposé de 000...0001 est 1111...111 et l'opposé de 000...0010 est 111...1110 etc. et enfin l'opposé de 0111...111 est 100...0001

Ainsi avec un octet soit 8 bits, on peut écrire les entiers naturels de 0 à 255 et pour les entiers relatifs, on peut les écrire de $-2^7 = -128$ à $2^7 - 1 = 127$. Plus précisément, les nombres de 0 à 127, c'est-à-dire en codage machine de 0000 0000 à 0111 1111, servent à représenter les entiers positifs ou nul et les nombres de 128 à 255, c'est-à-dire en codage machine de 1000 0000 à 1111 1111, représentent les entiers relatifs négatifs.

Remarque : quel que soit le nombre n de bits utilisés, le nombre -1 est représenté par le nombre $2^n - 1$ écrit en binaire, donc par une suite de 1.

Exercice 07 Compléter les cases vides du tableau suivant dans une représentation avec trois bits

codage binaire	000	001					110	
entiers non signés	0			3			6	
entiers signés	0				-4			

■ Entiers multi-précision

On a vu que l'on peut avoir dépassement de capacité dans une addition par exemple. Signalons une règle simple sur les entiers signés. Si les deux opérandes sont du même signe, il y a dépassement si le résultat n'est pas de même signe. Par exemple avec quatre bits de capacité, on sait que les nombres positifs sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et les négatifs 8 = -8, 9 = -7, 10 = -6, 11 = -5, 12 = -4, 13 = -3, 14 = -2, 15 = -1.

Alors la somme 6 + 2 (qui est en machine 0110 + 0010 = 1000) donne 8 = -8 et est donc négatif. Ce qui n'est pas logique, la somme de deux entiers positifs doit rester un entier positif. Le souci vient que l'on est sorti de la capacité.

Si les deux opérandes ne sont pas du même signe, il n'y a jamais de dépassement.

Par exemple $6 - 2 = - + (-2) = 4$

De façon générale, avec deux entiers signés p et q sur n bits, si $p + q \geq 2^{n-1}$ ou si $p + q < -2^{n-1}$, il y a un dépassement de capacité positif dans le premier cas et négatif dans le second cas.

Cas particulier du langage Python

Le langage Python gère la taille mais limitée quand même par la capacité de la mémoire. Cependant, si un nombre dépasse la taille maximale utilisable par le processeur, ce nombre est découpé en plusieurs parties et Python s'occupe des différentes opérations à effectuer. Cela prend alors plus de temps et d'espace en mémoire et peut ralentir sérieusement un programme.

On peut vérifier avec le programme suivant que la première boucle s'exécute plus vite que la deuxième. La différence s'explique par la gestion des entiers longs dans la deuxième boucle.

```
In [1]: from time import time
In [2]: top = time()
In [3]: n = 0
In [4]: for i in range(1800):
        n = n * (2 ** i)
        print(time() - top)

Out [4]: 123.44003105163574

In [5]: n = 2**180
In [6]: for i in range(1800):
        ...:     n = n * (2 ** i)
        print(time() - top)
Out [6]: 151.47867965698242
```

La machine travaille avec des entiers codés sur des mots de taille fixe. Cette taille est limitée par le processeur (32 ou 64 bits). Nous pouvons obtenir facilement certaines informations avec le module `sys`

```

In [14]: import sys

In [15]: sys.maxsize
Out[15]: 9223372036854775807

In [16]: sys.int_info
Out[16]: sys.int_info(bits_per_digit=30, sizeof_digit=4)

```

Le nombre `maxsize` donne la valeur maximale de la taille de mots gérés par la machine soit $2^{31} - 1$ sur une plateforme 32 bits et $2^{63} - 1$ sur une plateforme 64 bits (on rappelle que les entiers sont signés).

```

In [17]: 2**31 - 1
Out[17]: 2147483647

In [18]: 2**63 - 1
Out[18]: 9223372036854775807

```

Donc ici le processeur est 64 bits.

Le nombre `bits_per_digit` est le nombre de bits utilisés pour chaque mot en Python. Comme il vaut ici 30, les entiers Python sont stockés en interne en base 2^{30} .

Le nombre `sizeof_digit` est la taille en octets d'un mot Python, c'est-à-dire la taille d'un bloc. Ainsi le nombre maximal de blocs de 4 octets est donc de l'ordre de $2^{63}/4$.

Chaque bloc de 4 octets est un nombre compris entre 0 et $2^{30} - 1$ bornes comprises. Le dernier bloc ne peut être 0.

La valeur du nombre est donc $bloc[0] + bloc[1] \times 2^{30} + bloc[2] \times 2^{60} + \dots$

Exemple : Soit le nombre $n = 8070450537616638489 = 537 \times 2^0 + 5 \times 2^{30} + 7 \times 2^{60}$

Dans la machine, cela fait normalement trois blocs. On obtient ceci :

03	00	00	00	00	00	00	00	00	19	02	00	00	05	00	00	00	07	00	00	00
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Pour commencer, le premier bloc de 8 octets donne le nombre de blocs de 4 octets utilisés pour le nombre n . Il y en a trois.

En effet, vue la décomposition de n , 537 va au `bloc[0]`, 5 au `bloc[1]` et 7 au `bloc[2]`.

Par ailleurs, si l'on examine le `bloc[0]`, on ne reconnaît pas vraiment 537. En fait l'écriture utilise le système hexadécimal :

$$537 = 2 \times 256 + 25 = 2 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = (219)_{16}$$

Remarquons ensuite que dans un bloc de 4 octets, chaque case fait un octet et on peut donc réunir deux chiffres en base 2^4 dans chaque case.

Ainsi $(219)_{16}$ est représenté par

19	02	00	00
----	----	----	----

Comme $5 = 5 \times 16^0$ et $7 = 7 \times 16^0$, on comprend les deux autres blocs.

Notons que le 3 du bloc de 8 octets est aussi de l'hexadécimal.

Chapitre 7

Floating-point numbers

■ Objectifs

Les incontournables :

savoir

Et plus si affinités :

Cours

■ Introduction

Nous savons représenter un nombre entier si ce nombre est compris entre deux bornes qui dépendent du nombre d'octets utilisés (voir chapitre 6). Pour les nombres non entiers c'est plus compliqué. Déjà, il y en a une infinité même entre deux bornes quelconques et de plus avec des mots de taille fixe, nous ne pouvons stocker qu'un nombre fini de décimales. Pour 0.125 pas de souci mais pour π ou $\sqrt{2}$ irrationnels ce sont des suites décimales illimitées.

En Python, on dispose de deux types de nombres :

1) **les nombres de type `int`** qui représentent des entiers de manière exacte. Ils constituent un ensemble fini inclus dans \mathbb{Z} . Avec des mots de n bits, on peut représenter en complément à deux tous les entiers signés de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$.

2) **Les nombres de type `float`** qui servent à représenter de manière exacte (pour certains décimaux) ou approché (pour les nombres rationnels non décimaux comme $1/3$ ou les nombres irrationnels) les réels non entiers relatifs.

■ Le type `float` en Python

Concrètement, un nombre de type `float` en Python est inclus dans \mathbb{D} l'ensemble des décimaux. C'est une partie finie de l'ensemble des nombres réels.

Remarque : les nombres entiers peuvent devenir des flottants. Ainsi `2` peut s'écrire `2.0` ou `200/100` ou `np.sqrt(4)` et il est alors de type `float`.

```
In [1]: import numpy as np
In [2]: 200/100, np.sqrt(4), 6/3, 6 // 3
Out[2]: (2.0, 2.0, 2.0, 2)
In [3]: type(6//3), type(np.sqrt(4))
Out[3]: (int, numpy.float64)
```

Par contre, le quotient de la division euclidienne de 6 par 3 est de type `int`

```
In [8]: 2.0 == 2
Out[8]: True
```

Ainsi, on remarque que le nombre deux étant représenté de manière exacte en machine, et donc `2.0` et `2` sont identiques.

Répartition des flottants

Donnons l'image des graduations sur une règle. La principale différence avec un double décimètre par exemple est que les flottants ne sont pas répartis de manière uniforme entre deux bornes comme sur la règle, mais ils deviennent de plus en plus rares à mesure que l'on s'éloigne de 0. Il y a environ 2^{52} flottants entre 1 et 2 mais il y en a aucun entre 2^{53} et $2^{53} + 2$ au sens strict.

Illustrons-le :

```
In [10]: 2.0**53 == 2**53
Out[10]: True
In [11]: 2.0**(53+1) == 2**(53+1)
Out[11]: True
In [12]: (2.0**53)+1 == (2**53)+1
Out[12]: False
In [13]: (2.0**53)+1 == 2.0**53
Out[13]: True
```

En fait, ce qui se passe c'est que le flottant $(2.0**53)+1$ devrait être entre $2**53$ et $2**53 + 2$ au sens strict et comme il n'y a pas de flottants entre ces deux entiers, il ne peut valoir $2**53 + 1$ mais par contre il vaut $2.0**53$ qui est le premier flottant strictement inférieur.

Plus précisément, la différence entre deux flottants consécutifs (sur une architecture 64 bits) dans $[1, 2]$ est 2^{-52} , celle entre deux flottants consécutifs dans $[2, 4]$ est 2^{-51} etc. Celle entre deux flottants consécutifs dans $[2^p, 2^{p+1}]$ est 2^{p-52} . Et donc les flottants supérieurs à 2^{52} sont tous des entiers (au sens mathématique).

La moitié des flottants est composé de flottants négatifs, l'autre moitié de flottants positifs.

Parmi les positifs, la moitié est composé de flottants entre 0 et 1, l'autre moitié de flottants supérieurs à 1.

Enfin, il y a des trous de plus en plus importants dans les flottants très grands, ainsi entre 2^{1023} et $2^{1023} + 2^{970}$, il n'y a aucun flottant.

```
In [10]: 2.0**1023 == 2.0**1023 + 2.0**970
Out[10]: True
```

Remarque : Attention, un nombre à virgule n'est pas en général un flottant. Illustrons avec des exemples

Le nombre décimal 0.1 n'a pas de représentation exacte avec le type `float`. Lorsqu'on écrit 0.1 en Python, c'est le nombre de type `float` le plus proche de 0.1 qui est enregistré en machine et utilisé pour les calculs.

```
In [1]: 0.1+0.1+0.1 == 0.3
Out[1]: False
In [2]: 0.1 == 0.1000000000000000055
Out[2]: True
In [3]: 0.3 == 0.2999999999999999889
Out[3]: True
In [4]: 0.1+0.1+0.1
Out[4]: 0.30000000000000004
```

Ainsi 0.3 est représenté en machine par le flottant 0.2999999999999999889 et 0.1 par le flottant 0.1000000000000000055 et donc le calcul $0.1+0.1+0.1$ ne donne pas tout à fait 0.3

Par contre, tapons maintenant :

```
In [6]: 0.5 + 0.5 == 1
Out [6]: True
In [7]: 0.25+0.25 == 0.5
Out [7]: True
```

Le seul nombre représenté de manière exacte parmi 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 est 0.5. Cela vient du fait que $0.5 = 5 \times 10^{-1}$ en écriture décimale et $0.5 = 1 \times 2^{-1}$ en écriture binaire, c'est-à-dire $(0.1)_2$. De même $0.25 = 1 \times 2^{-2}$ et donc en binaire c'est $(0.01)_2$.

On vient d'introduire les nombres à virgule exprimés en base différente de 10. On va développer cette notion dans le paragraphe suivant.

■ Écriture et représentation des nombres de type float

Commençons par un exemple.

$$125.568 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}.$$

On étend la formule en base $b \geq 2$

$$(a_n \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-p})_b = a_n \times b^n + \dots + a_1 \times b + a_0 + a_{-1} \times b^{-1} + \dots + a_{-p} \times b^{-p}$$

Par exemple $(213,03)_4 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 3 \times 1 + 0 \times 4^{-1} + 3 \times 4^{-2} = \frac{371}{16} = (23.1875)_{10}$

Passons au binaire qui est le plus important pour nous.

Conversion d'un nombre à virgule du binaire à la base 10

Exercice 01 : en vous servant de la formule plus haut, écrire $(101,101)_2$ en base 10

Conversion d'un nombre à virgule de la base 10 au binaire

Partons d'un exemple. Considérons 13.875 en base 10.

On sépare d'abord la partie entière de la partie décimale et on exprime la partie entière en base 2 :

$$13.875 = 13 + 0.875 \text{ et } (13)_{10} = (1101)_2$$

La méthode consiste ensuite à effectuer des multiplications par 2 successives :

$$\begin{aligned} 0.875 &= 1.75 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 0.75 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 1.5 \times 2^{-2} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0.5 \times 2^{-2} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \end{aligned}$$

On obtient $(0.111)_2$ et finalement $(13.875)_{10} = (1101.111)_2$

Exercice 02 : en vous inspirant de l'exemple précédent, écrire $(145.25)_{10}$ en binaire

Remarquons que toutes les conversions précédentes ont été rendues possibles car le nombre à virgule est à écriture finie.

Passons au cas général.

Écriture infinie d'un nombre à virgule

Considérons le nombre $1000/1010 = 10^3/(10^3 + 10)$ en base 10

```
In [12]: 1000/1010
Out[12]: 0.9900990099009901
```

Ce nombre est-il fini ?

```
In [13]: import decimal
In [14]: D = decimal.Decimal
In [15]: decimal.getcontext().prec = 80
In [16]: print(D(1000/1010))
Out[16]: 0.99009900990099009021605525049380958080291748046875
```

On remarque donc que l'écriture est en fait infinie.

Prenons le nombre d'écriture décimale $\frac{8}{10} = 0.8$ et écrivons son écriture en base 2.

$$\begin{aligned}
0.8 &= 1.6 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 0.6 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 1.2 \times 2^{-2} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0.2 \times 2^{-2} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1.6 \times 2^{-5} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 0.6 \times 2^{-5} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1.2 \times 2^{-6} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 0.2 \times 2^{-6} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 1.6 \times 2^{-9} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 1 \times 2^{-9} + 0.6 \times 2^{-9} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 0.2 \times 2^{-10} \\
&= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1.6 \times 2^{-13} \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Ainsi l'écriture en base 2 de 0.8 est $(0.1100110011001100\dots)_2$ et la séquence 1100 est ainsi répétée indéfiniment.

En divisant par 8 (ou encore 2^3), on déplace la virgule de trois places vers la gauche et donc $\frac{1}{10}$ a pour écriture en base 2 : $(0.0001100110011001100\dots)_2$

On peut en déduire que tous les nombres en base 10 de la forme $1/10, 2/10, 4/10, 8/10$ ont une écriture infinie en base 2 (alors que ce n'est pas le cas en base 10) et il en est de même de $16/10, 32/10$ etc. et plus généralement de tous les nombres de la forme $2^n/10$.

Proposition. Si un nombre a une écriture infinie en base 2, alors le nombre obtenu après l'ajout ou le retrait d'un entier, une multiplication ou une division par deux a aussi une écriture infinie en base deux.

Représentation d'un nombre

On représente un nombre x par un **signe** + ou -, une **mantisse** a et un **exposant** $p \in \mathbb{Z}$.

Ainsi si x est en base dix, on commence par l'écrire $x = \pm a \times 10^p$, où $a \in [1, 10[$ et pour pouvoir l'écrire en base deux, on l'écrit $x = \pm b \times 2^p$, où $b \in [1, 2[$.

Remarque : En machine, le signe est remplacé par 0 ou 1. Il suffit d'un bit en machine pour coder le signe. Le choix fait est 0 pour les nombres positifs et 1 pour les nombres négatifs. Nous en reparlerons pour la norme IEEE-754 (voir le complément plus loin).

Observons l'écriture en base deux de quelques nombres décimaux (écrits en base dix au départ)

Exemples

- Le nombre 3 (en base dix) est $3 \times 10^0 = 1.5 \times 2^1$, on a :

$$1.5 = 1 + 0.5 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = (1.1)_2 \Rightarrow 3 = (1.1)_2 \times (10)_2$$

On peut aussi remarquer que 3 s'écrit $(11)_2$ en binaire et son écriture avec une mantisse entre 1 et 2 le transforme bien en $(1.1)_2 \times (10)_2$

- Le nombre 5 (en base dix) est $5 \times 10^0 = 1.25 \times 2^2$, on a :

$$1.25 = 1 + 0.25 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-2} = (1.01)_2 \Rightarrow 5 = (1.01)_2 \times (100)_2$$

On peut aussi remarquer que 5 s'écrit $(101)_2$ en binaire et son écriture avec une mantisse entre 1 et 2 le transforme bien en $(1.01)_2 \times (100)_2$

Exercice 03 *Écrire les nombres 4.5 et 0.25 sous la forme de produits de deux nombres en binaire du même type que dans les deux exemples précédents.*

Tous nos exemples précédents fonctionnaient bien. Ce n'est pas l'écriture $b \times 2^p$ le souci c'est le codage en binaire ensuite. Ainsi prenons 0.2 en base dix et on a rapidement $0.2 = 1.6 \times 2^{-3}$.

Or on sait que les divisions de 1.6 créent un cycle sans fin (voir la page précédente).

Comme 0.8 s'écrit $(0.11001100110011001100\dots)_2$ en binaire, 0.2 s'écrit

$$(0.0011001100110011001100\dots)_2$$

en ajoutant deux zéros après la virgule car pour passer de 0.8 à 0.2, on divise deux fois par 2 donc on divise deux fois par $(10)_2$ en binaire. Ainsi :

$$0.2 = (0.0011001100110011001100\dots)_2 = (1.1001100110011001100\dots)_2 \times (1000)_3$$

et la mantisse $(1.1001100110011001100\dots)_2$ est un nombre décimal illimité. Il en est de même pour le réel 0.1 et aussi de la plupart des décimaux comme on s'en doute.

Pour représenter les nombres réels sur des mots de taille fixe, nous utilisons donc des valeurs exactes pour certains nombres mais approchées pour la plupart.

Ces valeurs sont des nombres décimaux de la forme $s m \times 2^p$, avec $s = \pm$, $m \in [1, 2[$ et

$$p_{min} \leq p \leq p_{max}$$

Les valeurs de la forme $s m \times 2^p$, avec $s = \pm$, $m \in [0, 1[$ et $p_{min} \leq p \leq p_{max}$ sont aussi autorisées afin de pouvoir coder le zéro et avoir plus de valeurs proches de zéro.

Norme IEEE-754

Bien que cette norme ne soit pas à développer explicitement au programme officiel d'informatique en TSI, elle peut quand-même tomber au concours (en reprenant sa définition dans l'énoncé du sujet). Et nous allons donc en parler (un peu).

Déjà, il faut savoir qu'il existe plusieurs normes et la norme IEEE-754 est seulement la plus courante de loin. Une telle norme définit précisément le codage des nombres en virgule flottante (c'est-à-dire entre-autre les nombres décimaux) et les standards pour les représenter en machine et calculer en binaire. Allons comprendre un peu ce qu'il y a sous le capot.

Partons d'un processeur de 64 bits ce qui est le plus courant.

Avec donc des mots de 64 bits, la norme IEEE-754 précise la règle suivante :

▷ le premier bit est pour le signe, 0 pour + et 1 pour - ;

▷ les 11 bits suivants sont pour l'exposant décalé e qui vaut $p + 1023$ avec la double inégalité : $-1022 \leq p \leq 1023$. En effet, comme on consacre ici 11 bits, il y a 2^{11} nombres possibles et $2^{11}/2 = 1024$ car on tient compte du signe de p .

Ainsi $1 \leq e \leq 2046$ (les valeurs 0 et 2047 sont réservées pour coder $-\infty$ et $+\infty$) et on écrit e en binaire ;

▷ enfin les 52 bits qui restent pour la mantisse tronquée m' qui vaut $m - 1$ avec la double inégalité : $1 \leq m < 2$. Dans la pratique, on écrit m en binaire et on ne garde que la partie après la virgule.

Ces trois parties sont concaténées pour former un mot de 64 bits.

Exercice 04 *Écrire la mantisse en binaire et l'exposant en base 10 du plus grand nombre flottant possible. Écrire alors ce nombre sous la forme d'une somme de puissances de 2*

```
In [1]: s = 0
In [2]: for i in range(971,1024):
...:     s = s + 2.0 ** i
In [3]: s
Out[3]: 1.7976931348623157e+308
```

Un nombre réel compris entre ce nombre et son opposé est alors représenté en machine par le flottant qui en est la meilleure approximation possible.

On sait que π est un irrationnel et son écriture décimale est illimitée donc on ne peut pas trouver de flottant égal à π . Et pourtant :

```
In [4]: import numpy as np
In [5]: type(np.pi)
Out[5]: float
```

En fait, `np.pi` n'est pas le vrai π , c'est le flottant le plus proche du vrai π .

Exemples de nombres écrits avec la norme IEEE-754

- Le nombre 20 s'écrit $+1.25 \times 2^4$.

Comme le signe est +, le premier bit est 0.

L'exposant est 4 donc l'exposant décalé est $4 + 1023 = 1027$, ce qui fait en binaire $(100\ 0000\ 0011)_2$ (en effet comme $1027 = 1024 + 3$ et comme $1024 = 2^{10}$, il suffit en binaire d'ajouter $(100\ 0000\ 0000)_2$ et $(11)_2$)

Alors dans la représentation machine les 11 bits sont : 100 0000 0011

Quant à la mantisse, elle vaut 1.25 et la mantisse tronquée est 0.25, c'est-à-dire 2^{-2} ou encore $(0.01)_2$ en binaire, ce qui donne en représentation machine les 52 bits : 0100 0000...0000 avec douze paquets de 0000 après le paquet 0100

Finalement le codage de 20 est : 0|100 0000 0011|0100 0000...0000 (on a mis des barrières virtuelles qui n'existent pas en représentation machine mais c'est pour séparer le signe, l'exposant décalé et la mantisse tronquée).

Exercice 05 *Écrire la représentation machine avec la norme IEEE-754 du décimal -0.375*

• Prenons le décimal 0.1 maintenant. On sait que l'on ne tombera pas sur un des flottants inscrits dans la machine et le but de cet exemple c'est de voir comment traiter un tel cas.

Partons de $0.1 = 1.6 \times 2^{-4}$. Le signe est + et donc le premier bit est 0.

L'exposant décalé est $-4 + 1023 = 1019$, ce qui donnera $(011\ 1111\ 1011)_2$ en binaire.

Pour la mantisse 1.6, rappelons que 0.8 vaut $(0.1100110011001100\dots)_2$ en binaire et donc le double vaut (il suffit de déplacer la virgule d'un cran) $(1.100110011001100\dots)_2$

Ainsi la mantisse tronquée est 1001 1001 ... 1001... Le problème est qu'il ne faut garder que les 52 premiers bits. La logique est donc de s'arrêter par le 13^{ème} groupement 1001 mais alors on a une valeur approchée par défaut. Comme le 53^{ème} bit est un 1, on prend la valeur approchée par excès qui est plus proche et ainsi le dernier groupement est 1010

La représentation en machine de 0.1 en norme IEEE-754 est donc :

$$0|011\ 1111\ 1011|1001\ 1001\dots\ 1001\ 1010$$

avec 12 groupements 1001 dans la troisième partie du mot.

■ Calculs approchés et comparaisons

Commençons par un exemple : pourquoi $0.1 + 0.2$, cela ne fait pas tout à fait 0.3? La réponse vient de l'utilisation de la norme IEEE-754 plus haut. Déjà, rappelons le problème.

```
In [16]: 0.1+0.2
Out[16]: 0.30000000000000004
```

On a vu que 0.1 ne peut pas s'écrire de façon exacte et en binaire le dernier groupement est 1010, ce qui crée une valeur approchée par défaut de 0.1 que l'on va appeler x .

$$x = (0.0001\ 1001\ 1001\ 1001\dots 1001\ 1010)_2$$

Cela donne $x = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + \dots + 2^{-45} + 2^{-48} + 2^{-49} + 2^{-51}$ que l'on peut regrouper en : $x = 2^{-4} + \sum_{k=1}^{11} (2^{-4k-1} + 2^{-4k-4}) + 2^{-49} + 2^{-51}$.

Comme nous sommes de gros fainéants, on va demander à Python de calculer.

```
In [7]: x = 2 ** (-4)
In [8]: for k in range(1,12):
...:     x = x + 2 ** (-4*k-1) + 2 ** (-4*k-4)
In [9]: x = x + 2 ** (-49) + 2 ** (-51)
In [10]: x
Out[10]: 0.10000000000000009
```

Maintenant, occupons-nous de 0.2 qui s'écrit en binaire $(0.001100110011\dots 0011\dots)_2$ et arrêtons-nous au 12^{ème} groupement 0011, comme le terme suivant est un 0, on prend donc cette valeur approchée par défaut de 0.2. On la note y qui vaut ainsi $2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + \dots + 2^{-51} + 2^{-52}$,

on regroupe en : $y = \sum_{k=0}^{12} (2^{-4k-3} + 2^{-4k-4})$.

Comme nous sommes toujours de gros fainéants, on va demander à Python de calculer.

```
In [12]: y = 0
In [13]: for k in range(0,13):
...:     y = y + 2 **(-4*k-3) + 2 ** (-4*k -4)
In [14]: y
Out[14]: 0.19999999999999996
```

Puis l'instant de vérité arrive.

```
In [15]: x + y
Out[15]: 0.30000000000000004
In [16]: 0.2+0.1
Out[16]: 0.30000000000000004
```

Donc retenir seulement 52 bits pour la mantisse crée des erreurs d'arrondis car on fait des opérations sur des valeurs approchées par excès ou par défaut et même parfois on combine les deux ce qui ne résout rien.

Remarques : 1. L'écart entre deux flottants consécutifs compris entre 1 et 2 est 2^{-52} .

2. Avec un codage sur 64 bits, le plus petit nombre positif non nul est 1.0×2^{-1022} .

Comparaisons

Pour comparer deux nombres flottants, on ne teste pas une égalité entre les deux nombres. On vérifie qu'ils sont suffisamment proches. Le « suffisamment » dépend du contexte. En effet, s'il n'y a pas de flottants entre a et c alors a et c représentent tous les réels entre a et c .

Par exemple, 10.0^{16} et $10.0^{16} + 1$ sont égaux pour la machine :

```
In [18]: 10.0 ** 16 == 10.0 ** 16 + 1
Out[18]: True
```

Ceci dit, certains nombres qui peuvent paraître égaux ne le sont pas forcément. Pour limiter les soucis, on peut créer un test de comparaison. Par exemple, dans la résolution de certains problèmes, si l'on prend en compte que six chiffres significatifs, $a = 10.0^{16}$ et $b = 10.0^{16} + 1$ sont de toute façon considérés comme égaux car $1 = b - a \leq b \times 10^{-6}$.

Pour comparer des flottants, on utilise une précision absolue et une précision relative. La précision absolue est utile pour des nombres proches de 0 sinon on peut s'en passer.

Créons la fonction booléenne **estproche**

```
In [19]: def estproche(a,b,tol_rel=1e-09, tol_abs=0.0):
...:     return abs(a-b) <= max(tol_rel * max(abs(a),abs(b)),
...:                             tol_abs)
```

Puis on la fait fonctionner.

```

In [20]: estproche(10.0**16, 10.0**16 +1)
Out[20]: True
In [21]: estproche(2**52, 2**53+1)
Out[21]: False
In [22]: estproche(2**52,2**53)
Out[22]: False
In [23]: estproche(2**52,2**52+1)
Out[23]: True

```

Dernier exemple, pour la route

Pour finir le chapitre, faisons un dernier exemple. Considérons les flottants $x = 2.0 - 2.0^{-52}$ et $y = 2.0$ qui sont deux flottants consécutifs et on remarque que $x + y$ est le même flottant que $2y$.

```

In [28]: x = 2.0 - 2.0 ** (-52)
In [29]: y = 2.0
In [30]: x == y
Out[30]: False
In [31]: x < y
Out[31]: True
In [32]: x + y == 2 * y
Out[32]: True

```

Nous allons comparer $(x + y)^2$ et $2(x^2 + y^2)$.

```

In [33]: a = (x+y)**2
In [34]: b = 2*(x**2+y**2)
In [35]: a > b
Out[35]: True
In [36]: a-b
Out[36]: 1.7763568394002505e-15

```

Donc il semble que $(x + y)^2$ est plus grand que $2(x^2 + y^2)$. Or mathématiquement, $2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$. Et donc $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ce qui est en contradiction avec x et y de l'énoncé pour lesquels $2(x^2 + y^2) < (x + y)^2$. On a encore une illustration du problème de travailler sur des valeurs approchées. On pourrait remarquer que cela vient du fait que l'inégalité est une égalité pour $x = y$, or ici $x == y$ est **False** et donc l'explication est moins triviale. Il faudrait décortiquer tous nos réels avec la norme IEEE-754, à ne faire que si vous avez du mal pour dormir.

Chapitre **8**

Analysis of an algorithm

■ Objectifs

Les incontournables :

- savoir reconnaître et utiliser un type d'instruction ;
- aborder l'effet de bord ;
- percevoir l'utilité de commentaires pour mieux comprendre un bloc d'instructions ou un choix de programmation ;
- savoir décrypter et gérer un message d'erreur ;
- être capable de repérer des cas simples à tester ;
- distinguer et traduire les cas limites dans un jeu de tests ;
- connaître quelques ordres de grandeurs de complexité d'algorithmes classiques ;
- distinguer et étudier les notions de complexité en temps et de complexité en espace.

Et plus si affinités :

Cours

■ Introduction

Après avoir écrit des programmes et réfléchi au rôle de code, il est important d'étudier le contenu avec précision. On doit aussi analyser ce contenu et vérifier que le résultat obtenu lors de l'exécution est celui attendu. Il est primordial que le programme fonctionne correctement. Sinon, on doit le déboguer. Par ailleurs, il est intéressant de se pencher sur la complexité d'un algorithme ce qui permet de les classer niveau performance.

■ Les syntaxes d'une instruction

1. Deux instructions particulières : expression et affectation

Une **expression** est utilisée pour calculer une valeur ou pour appeler une procédure. Une expression est composée de noms, de nombres, de chaînes de caractères, d'éléments séparés par des signes de ponctuation, de crochets, de parenthèses, d'opérateurs (warning pas = qui n'est pas un opérateur) etc. Une expression a une valeur.

Une **affectation** est un autre type d'instruction et lie un nom à une valeur ou modifie un élément d'un objet mutable (comme une liste). Le symbole = est utilisé, rappelons-le, pour l'affectation.

2. Cas général

De façon générale, instruction est un morceau de code minimal qui produit un effet. Une instruction est exécutée par la machine. Attention, une instruction ne correspond pas toujours à une ligne de codes. On peut avoir plusieurs instructions séparées par des points virgules dans une ligne. On parle d'instruction **simple**. Ce sont en général des expressions ou des affectations.

On peut avoir aussi une instruction qui prend toute une ligne et qui affecte plusieurs lignes. On parle d'instruction **composée**.

Une instruction simple peut être une affectation, une fonction prédéfini par exemple **assert** ou **return** ou **break** ou **import** etc.

Une instruction composée est une instruction sur une ligne terminée par deux points : suivie d'une ou plusieurs instructions indentées. On pense à une boucle conditionnelle du type **if** par exemple suivis de **elif** ou **else**. On peut penser aussi à une boucle **for** ou à la définition d'une fonction avec **def**.

Une instruction (hormis une expression) n'a pas de valeur. Certaines instructions nécessitent une expression comme le signe = suivis d'une valeur. Ces choix de conception du langage Python ont des conséquences à connaître. Le mieux c'est taper des exemples.

Exemple 01 Une manipulation de **assert**, fonction déjà entrevue dans le chapitre 1.

```

In [1]: x = 1
In [2]: assert x = 1
      File "<ipython-input-4-d93c3e0517ec>", line 1
          assert x=1
                ^
SyntaxError: invalid syntax
In [3]: assert x == 1

```

Explication : écrire **assert x=1** provoque une erreur de syntaxe même si l'on a tapé avant **x=1**. Par contre **assert x==1** est une bonne syntaxe, en fait il renvoie alors **True** sans l'afficher.

Exemple 02 Manipulation d'une expression suivant **if**.

```

In [10]: x =3
In [11]: if x%2 == 1:
...:     x=x+1
In [12]: x
Out[12]: 4
In [13]: x=5
In [14]: if x%2 :
...:     x=x+1
In [15]: x
Out[15]: 6

```

Explication : On remarque que l'instruction **x%2 == 1** et l'instruction **x%2** après **if** sont similaires. En effet, le reste de la division euclidienne par 2 donne 0 ou 1. Tout nombre nul est interprété comme **False** et la boucle **if** ne fonctionnera que si **x%2** vaut 1 et alors considérée comme vraie.

Il faut savoir que les mots **if**, **elif**, **while**, **assert** doivent être suivis d'une expression. Cette expression n'a pas forcément une valeur booléenne mais quelle que soit sa valeur, elle est interprétée comme telle. Ainsi par exemple :

```

In [16]: assert not print("!!!")
!!!

In [17]: assert print("!!!")
!!!
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-17-9f325eaebad1>", line 1, in <module>
    assert print("!!!")

AssertionError

```

Ainsi **assert not print("!!!")** ne provoque pas de message d'erreur. En effet, **print("!!!")** est une expression de type **None**

```
In [18]: type(print("!!!"))
!!!
Out[18]: NoneType
```

Et l'expression **not None** a pour valeur **True**.

De façon générale, tout nombre nul et tout conteneur vide est interprété comme une valeur **False**.

C'est le cas pour **0**, **0.0**, **"␣"**, **[]**, **()**, **,**, **None**. Toute autre valeur est interprétée comme **True**.

C'est pourquoi par exemple **if x% 3** renvoie **True** pour deux valeurs 1 et 2.

Donc l'égalité **==** est ici obligatoire si l'on veut différencier ces deux cas.

■ Effet de bord ou side effect

On dit qu'une fonction a un **effet de bord ou side effect** si son exécution modifie quelque chose en dehors de ce qui est défini dans le corps de la fonction, par exemple un de ses paramètres ou une variable globale définie dans le programme. Pour que ça semble plus clair dans votre esprit, donnons deux exemples.

Exemple 03. Nous allons créer deux fonctions qui ajoute **x** à une liste **liste**.

```
In [2]: def ajoute01(liste ,x):
...:     liste.append(x)

In [3]: def ajoute02(liste ,x):
...:     liste = liste + [x]
...:     return liste

In [4]: liste = [1,2,3,4]
In [5]: ajoute01(liste,5)
In [6]: liste
Out[6]: [1, 2, 3, 4, 5]

In [7]: liste = [1,2,3,4]
In [8]: ajoute02(liste,5)
Out[8]: [1, 2, 3, 4, 5]
In [9]: liste
Out[9]: [1, 2, 3, 4]
```

On remarque qu'après l'action de **ajoute01**, **liste** a été modifié (ici 5 a été ajouté en fin de liste).

C'est **append** qui modifie la liste initiale. Il y a donc un effet de bord pour **ajoute01**.

Par contre l'action de **ajoute02** ne modifie pas **liste** quand on l'appelle. En fait, dans **ajoute02**, on crée une variable locale **liste** qui n'est pas **liste** hors procédure. Et comme toute variable locale, elle est oubliée après l'exécution de la procédure.

Exemple 04. Donnons un exemple un peu plus subtil. Nous allons créer deux fonctions qui multiplie **x** aux éléments d'une liste **liste**.

```

In [10]: def multiplie01(liste ,x):
...:     res = liste
...:     for i in range(len(res)):
...:         res[i] = x * res[i]
...:     return res

In [11]: def multiplie02(liste ,x):
...:     res = liste
...:     return [x*res[i] for i in range(len(res))]

```

Dans `multiplie01`, `liste` qui n'est jamais une variable locale est récupérée par la variable locale `res` dont le contenu est modifié par la procédure. Et donc `liste` se retrouve modifiée.

Il y a effet de bord.

Par contre dans `multiplie02`, bien que `res` récupère aussi `liste`, cette variable `res` n'est pas modifiée car on retourne une nouvelle liste créée à partir de `res`.

Illustrons-le avec `liste`, où on a affecté `[1,2,3,4]` au départ.

On multiplie par 5 par les deux procédures.

```

In [12]: multiplie01(liste ,5)
Out[12]: [5, 10, 15, 20]

In [13]: liste
Out[13]: [5, 10, 15, 20]

In [14]: liste = [1,2,3,4]
In [15]: multiplie02(liste ,5)
Out[15]: [5, 10, 15, 20]

In [16]: liste
Out[16]: [1, 2, 3, 4]

```

■ Spécification d'une fonction et annotations

1. Spécification ou docstring

Une spécification permet d'informer les utilisateurs de la tâche effectuée par la fonction, de préciser les contraintes imposées pour les paramètres et ce qui peut être attendu des résultats. Elle peut aussi préciser les messages d'erreurs affichés en cas de mauvaise utilisation. Elle est résumée dans la **docstring** inscrite au début du corps de la fonction entre des triples guillemets.

On peut créer son docstring en créant la fonction ou la procédure. On le placera avant le corps de la procédure mais après la déclaration du nom de la fonction avec le modèle suivant :

```

def nom_de_la_procedure(arguments):
    """ corps du docstring : informations sur la fonction , non
        obligatoires mais recommandees """
    corps de la procedure

```

Attention, le docstring est destiné à l'utilisateur. Il n'est pas utilisé par l'interpréteur Python. On peut récupérer le docstring d'une fonction ou d'une procédure avec **help**

Exemple 04 bis. Reprenons **multiplie02** en lui mettant un docstring.

```
In [1]: def multiplie02(liste,x):
...:     """ Pas d'effet de bord. Chouetteeeeeeee !!!!! """
...:     res = liste
...:     return [x * res[i] for i in range(len(res))]
In [2]: help(multiplie02)
Help on function multiplie02 in module __main__:

multiplie02(liste , x)
    Pas d'effet de bord. Chouetteeeeeeee !!!!!
```

Les fonctions prédéfinies ont aussi leurs docstrings.

Exemple 05. Partons à la découverte de la fonction **divmod**

```
In [3]: help(divmod)
Help on built-in function divmod in module builtins:

divmod(x, y, /)
    Return the tuple (x//y, x%y). Invariant: div*y + mod == x.
```

Analysons ce qui a été affiché. La fonction **help** est allé chercher le docstring de **divmod**. La fonction a deux arguments **x** et **y** et renvoie un couple composé du quotient et du reste de la division euclidienne de **x** par **y**. L'égalité **div*y+mod == x** signifie que si l'on rentre dans **div** (respectivement **mod**) le premier élément (respectivement le second élément) du couple, **x** s'obtient en faisant **div*y+mod** ce qui est bien la division euclidienne de **x** par **y**.

```
In [4]: x = 7.2; y = 3
In [5]: div , mod = divmod(x,y)
In [6]: div
Out[6]:
    2.0

In [7]: mod
Out[7]:
    1.2000000000000002

In [8]: div*y + mod == x
Out[8]:
    True
```

On peut remarquer que **x** et **y** ne sont pas obligatoirement entiers pour faire la division euclidienne.

Exemple 06. Je désire connaître mieux `hypot` du module `math`

```
In [12]: import math

In [13]: help(math.hypot)

Help on built-in function hypot in module math:

hypot(...)
    hypot(*coordinates) -> value
    Multidimensional Euclidean distance from the origin to a
    point.
    Roughly equivalent to:
        sqrt(sum(x**2 for x in coordinates))
    For a two dimensional point (x, y), gives the hypotenuse
    using the Pythagorean theorem: sqrt(x*x + y*y).
    For example, the hypotenuse of a 3/4/5 right triangle is:
    >>> hypot(3.0, 4.0)
    5.0
```

On remarque que le docstring est plus ou moins complet selon la fonction appelée. Python est plus prolifique pour `math.hypot` que pour `divmod`.

2. Annotations et commentaires

Un programme doit être lu et relu facilement par l’auteur mais aussi par quelqu’un qui découvre le programme. Aux concours notamment les annotations et commentaires ont vraiment leur place. Si le candidat doit fabriquer sa procédure et qu’elle dépasse quelques lignes de codes, il faut mettre des annotations pour expliquer ce que fait telle ligne de code ou telle boucle. Souvent dans les sujets il y a des procédures à trous où le candidat doit rajouter les lignes ou les morceaux de ligne de code manquants. Dans ces procédures, il y a souvent des annotations dont le rôle est de guider pour remplir ce qui manque. Le docstring (voir le paragraphe précédent) joue aussi ce rôle.

Un commentaire est toujours précédé de `#` et comme pour un docstring, un commentaire n’est pas utilisé par l’interpréteur Python. Remarquons qu’un commentaire peut être seul sur une ligne ou se placer après du code sur la même ligne que ce code.

Exemple 07

Nous allons créer une procédure `Swap_first_last` d’argument `liste` qui permute le premier et le dernier élément d’une liste et mettons-y un docstring assez complet et des annotations pour expliquer les lignes de codes.


```

In [14]: def Swap_first_last(liste):
...:     """ liste est de type list
...:     la procedure permute le premier et le dernier
...:     element et renvoie une nouvelle liste
...:     Swap_first_last([1,2,3,4]) renvoie [4,2,3,1] """
...:     n = len(liste) # n est la longueur de liste
...:     # On fait une copie de liste :
...:     copie = liste[:]
...:     # on permute les deux elements extremes de liste :
...:     copie[0], copie[n-1] = copie[n-1], copie[0]
...:     return copie

```

```

In [15]: liste = [-5,8,7,1,2,4]

```

```

In [16]: Swap_first_last(liste)

```

```

Out[16]:
      [4, 8, 7, 1, 2, -5]

```

```

In [17]: liste

```

```

Out[17]:
      [-5, 8, 7, 1, 2, 4]

```

On peut remarquer que `Swap_first_last` n'a pas d'effet de bord, contrairement à `multiplie01`

■ Assertion

Pour l'instant, on s'est intéressé dans une procédure à comment l'expliquer, faire comprendre ce qu'elle fait, quelles variables on utilise etc. On va maintenant rajouter des instructions qui vont arrêter le programme en cas de mauvaise utilisation.

On utilise une **assertion** qui est l'affirmation qu'une proposition est vraie. La fonction clé qui va être utile, vous l'avez peut-être deviné, c'est la fonction **assert** que l'on commence à connaître. On rappelle que l'on utilise **assert** suivi d'une expression dont la valeur est interprétée comme une valeur booléenne. Comme on a vu plus haut, si l'expression a la valeur **True**, il ne se passe rien. Sinon, le programme est interrompu et un message d'erreur s'affiche **AssertionError**

Exemple 08. Établissons un programme qui renvoie l'inverse d'un flottant. L'idée c'est qu'il faut signaler quand un très mauvais élève veut trouver l'inverse de 0.

```

In [19]: def inverse(x):
...:     """ x est un nombre non nul de type int ou float et
...:         cette fonction renvoie l'inverse de x """
...:     assert x!= 0
...:     return 1/x

In [20]: inverse(-3)
Out[20]:
-0.3333333333333333

In [21]: inverse(0)
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-21-7538d73c586c>", line 1, in <module>
    inverse(0)

  File "<ipython-input-19-49acf1e29ca6>", line 3, in inverse
    assert x!= 0

AssertionError

```

Que se passe t-il si l'on ne borde pas le cas de la division par 0.

```

In [22]: def new_inverse(x):
...:     return 1/x

In [23]: new_inverse(0)

Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-23-a310b552216b>", line 1, in <module>
    new_inverse(0)

  File "<ipython-input-22-0ed19f52f469>", line 2, in new_inverse
    return 1/x

ZeroDivisionError: division by zero

```

Finalement, pas grand chose de plus! Et ici l'erreur commise est bien expliquée.

Exemple 09. Reprendre la fonction **maximum** créée au chapitre 3 page 39 en y rajoutant un *docstring* disant que *L* doit être non vide et ce qu'elle renvoie et en y rajoutant aussi un *assert* qui interrompt le programme si *L* est vide. On nommera **new_maximum** cette fonction.

```
In [6]: def new_maximum(L):
...:     """ L est une liste de nombres non vide qui renvoie
...:         le maximum de la liste L """
...:     assert L != []
...:     maxi = L[0]
...:     for i in range(1,len(L)):
...:         if L[i] > maxi :
...:             maxi = L[i]
...:     return maxi
```

```
In [7]: new_maximum([1,7,0,-8,7,10,2])
```

```
Out[7]:
```

```
10
```

```
In [8]: new_maximum([])
```

```
Traceback (most recent call last):
```

```
File "<ipython-input-8-c6997c0edb32>", line 1, in <module>
    new_maximum([])
```

```
File "<ipython-input-6-7a1839672011>", line 3, in new_maximum
    assert L != []
```

```
AssertionError
```

```
# Et juste pour le fun :
```

```
In [10]: help(new_maximum)
```

```
Help on function new_maximum in module __main__:
```

```
new_maximum(L)
```

```
    L est une liste de nombres non vide qui renvoie le maximum de
    la liste L
```

Donnons un dernier exemple dans le monde des dictionnaires :

```
In [11]: def fonction(dico,k):
...:     """ dico est un dictionnaire
...:         k est une cle de dico """
...:     assert k in dico
...:     corps de la procedure
```

On contrôle ici si la valeur passée en second argument est bien une clé du dictionnaire mis en premier argument. Si tel n'est pas le cas, le programme s'interrompt et **Assertion Error** s'affiche.

■ Tests d'un programme

1. Introduction

Même si l'on soit clair dans le docstring, que l'on mette des commentaires aux endroits stratégiques du programme et que l'on borde aussi avec `desassert` pour éviter de rentrer n'importe quoi en argument, il peut se passer des choses étranges dans l'exécution du programme qui peut très bien ne pas nous sauter aux yeux de suite. Il y a plusieurs sortes de bugs.

Une erreur survient lors de certains tests et pas avec d'autres, c'est un bug intermittent. Ce cas est un peu vicieux comme on va le voir avec l'exemple en dessous ;

une erreur survient pour chaque test, c'est un bug permanent ; on a certainement tapé un mauvais code quelque part, par exemple on a écrit une variable locale avec une faute d'orthographe, mettre un `=` alors que c'est un `==`, etc. ;

le programme s'arrête de manière prématurée ou ne s'arrête pas, le bug est visible.

Là c'est soit encore une erreur de frappe, soit un souci dans la conception de l'algorithme.

Exemple 10. Nous allons construire deux fonctions, la première **Strange01(x,y)** retourne \sqrt{xy} et la seconde **Strange02(x,y)** retourne $\sqrt{x}.\sqrt{y}$. Nous utiliserons la puissance 0.5 pour la racine carrée. On peut utiliser aussi `sqrt` de `numpy` mais quand c'est possible, c'est mieux sans package.

```
In [11]: def Strange01(x,y):
...:     return (x*y) ** 0.5
In [12]: def Strange02(x,y):
...:     return (x ** 0.5) * (y ** 0.5)
In [13]: Strange02(1e152,1e152)/Strange01(1e152,1e152)
Out[13]: 1.0
In [14]: Strange02(1e155,1e155)/Strange01(1e155,1e155)
Out[14]: 0.0
# Juste pour la remarque de l'annonce :
In [15]: import numpy as np
In [16]: np.sqrt(9)
Out[16]: 3.0
```

Comme x et y sont positifs, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et normalement les deux fonctions donnent le même résultat. Et pourtant, c'est le cas pour $x = y = 10^{152}$ et ce n'est pas le cas pour $x = y = 10^{155}$. Est-ce un problème d'arrondi. Voyons avec le module `decimal` vu en fin de chapitre 5.

```
In [17]: import decimal
In [18]: D = decimal.Decimal
In [19]: decimal.getcontext().prec = 40
In [20]: D(Strange02(1e155,1e155))/D(Strange01(1e155,1e155))
Out[20]: Decimal('0E-1000038')
# Ce n'est pas bon. Augmentons la precision
In [21]: decimal.getcontext().prec = 800
In [22]: D(Strange02(1e155,1e155))/D(Strange01(1e155,1e155))
Out[22]: Decimal('0E-1000798')
```

Donc le problème reste compliqué. Bref, évitons les nombres très, très grands (ou petits)!

2. Construction d'un jeu de tests

Construire un jeu de tests consiste à définir un ensemble de données qui vont être utilisées pour vérifier que le programme produit bien les résultats attendus avec ces données. Ces vérifications peuvent se faire de plusieurs manières. On peut utiliser **print** pour afficher quelques réponses et vérifier qu'elles sont correctes. Pour un nombre conséquent de tests, il est pratique d'utiliser aussi des assertions. Un message d'erreur est affiché seulement pour les cas qui posent problème.

On distinguera plusieurs types de tests :

- Tester quelques cas simples typiques (pour une utilisation basique du programme);
- tester des valeurs extrêmes, des cas limites, des cas interdits;
- tester un nombre important de données (choisies de façon aléatoire par exemple);
- tester des cas qui pourraient nécessiter un temps d'exécution important afin d'évaluer l'efficacité du programme.

Une idée pour effectuer ces tests, c'est de partitionner le domaine d'entrée. Par exemple si l'on désire calculer le PGCD de deux entiers m et n , c'est-à-dire le plus grand diviseur commun (ainsi 5 est le PGCD de 15 et de 10), on fait un programme personnel **LEPGCD** d'arguments **m** et **n** qui retourne le PGCD de **m** et de **n**. Puis on peut tester avec un cas où **m** > **n** puis un autre avec **m=n** puis un cas avec **m** est un multiple de **n** etc.

Si l'on a créé une fonction avec une liste à l'entrée, on teste naturellement le cas d'une liste vide et le cas d'une liste à un élément ou le cas d'une liste avec un élément qui se répète un certain nombre de fois, etc.

Exemple 07 bis. Reprenons la fonction **Swap_first_last** qui inverse le premier et dernier élément d'une liste.

```
In [14]: def Swap_first_last(liste):
...:     """ liste est de type list
...:     la procedure permute le premier et le dernier
...:     element et renvoie une nouvelle liste
...:     Swap_first_last([1,2,3,4]) renvoie [4,2,3,1] """
...:     n = len(liste) # n est la longueur de liste
...:     # On fait une copie de liste :
...:     copie = liste[:]
...:     # on permute les deux elements extremes de liste :
...:     copie[0], copie[n-1] = copie[n-1], copie[0]
...:     return copie
```

On essaye des cas différents. Si **assert** ne renvoie rien, c'est que l'égalité est **True**.

```
In [2]: assert Swap_first_last([1,2,3,4]) == [4,2,3,1]

In [3]: assert Swap_first_last([[1,2],[ 'oui', 'non' ],[ 'OK', 'KO' ]])
        == [[ 'OK', 'KO' ],[ 'oui', 'non' ],[1,2]]

In [4]: assert Swap_first_last([1]) == [1]
```

Par contre, si l'on tape :

```
In [5]: assert Swap_first_last([]) == []
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-5-8e4cebbbed72>", line 1, in <module>
    assert Swap_first_last([]) == []

  File "<ipython-input-1-c90e4594a822>", line 9, in
    Swap_first_last
    copie[0], copie[n-1] = copie[n-1], copie[0]

IndexError: list index out of range
```

La fonction `Swap_first_last` ne traite pas le cas d'une liste vide. Changeons le programme.

```
In [6]: def New_Swap_first_last(liste):
...:     """ liste est de type list
...:     la procedure permute le premier et le dernier
...:     element et renvoie une nouvelle liste
...:     Swap_first_last([1,2,3,4]) renvoie [4,2,3,1] """
...:     if liste == [] : return []
...:     n = len(liste) # n est la longueur de liste
...:     # On fait une copie de liste :
...:     copie = liste[:]
...:     # on permute les deux elements extremes de liste :
...:     copie[0], copie[n-1] = copie[n-1], copie[0]
...:     return copie

In [7]: New_Swap_first_last([])
Out[7]: []
```

Cela marche!

Exemple 11. Une fonction prend en argument deux listes de même longueur. La deuxième liste est modifiée et contient à la fin les mêmes éléments que la première liste aux mêmes places s'ils sont positifs ou nuls et des zéros sinon. Nous allons faire deux versions et nous rendre compte qu'une des deux ne marche pas toujours.

Dans la première version **ESSAI01**, on crée une boucle dans laquelle on remplace les éléments de `liste2` de l'indice 0 à `len(liste1)-1` par ceux de `liste1` de même indice si cet élément de `liste1` est positif. Sinon on y met 0. On retourne enfin `liste2` transformé.

```
In [1]: def ESSAI01(liste1 , liste2):
...:     for i in range(len(liste1)):
...:         if liste1[i] >= 0 :
...:             liste2[i] = liste1[i]
...:         else:
...:             liste2[i] = 0
...:     return liste2
```

Dans la seconde procédure **ESSAI02**, on commence par remplacer tous les éléments de **liste2** par des 0. Puis on remplace ces 0 par les éléments de **liste1** correspondants à leur indice si ces éléments de **liste1** sont positifs.

```
In [8]: def ESSAI02(liste1 , liste2):
...:     for i in range(len(liste2)):
...:         liste2[i] = 0
...:     for i in range(len(liste2)):
...:         if liste1[i] >= 0 :
...:             liste2[i] = liste1[i]
...:     return liste2
```

Faisons des essais.

```
In [10]: liste1 = [2,-3,5,-1]
In [11]: liste2 = [1,2,3,4]
In [12]: ESSAI01(liste1 , liste2)
Out[12]: [2, 0, 5, 0]
In [13]: ESSAI02(liste1 , liste2)
Out[13]: [2, 0, 5, 0]
```

Pour l'instant tout est OK.

```
In [16]: ESSAI01(liste1 , liste1)
Out[16]: [2, 0, 5, 0]
In [17]: ESSAI02(liste1 , liste1)
Out[17]: [0, 0, 0, 0]
```

L'explication c'est que **liste1** est devenu **liste2** et au bout de la première boucle de **ESSAI02**, **liste1** ne contient plus que des 0. Puis on reemplait **liste2** des 0 de **liste1** dans la deuxième boucle car **liste1[i] >= 0** est toujours vraie.

■ Complexité d'un algorithme

1. Introduction

Un algorithme, en dehors du fait qu'il doit être correct, doit satisfaire à des deux impératifs en terme de consommation de ressources :

Utiliser un espace en mémoire acceptable, on parle de **complexité en espace** ;
produire la réponse attendue en un temps acceptable, on parle de **complexité temporelle**.

Le temps d'exécution dépend de la machine, du langage de programmation, de l'algorithme. On ne peut pas jouer généralement sur les deux premiers mais beaucoup plus sur le troisième. C'est sa complexité temporelle qu'il faut analyser.

Nous supposons que le temps d'exécution d'une affectation, d'une opération arithmétique simple, d'une comparaison sont pratiquement identiques.

Ces temps d'exécutions constituent une unité de base.

Ainsi une permutation de deux éléments correspond à une double affectation donc vaut deux affectations.

Nous posons les règles suivantes :

Le temps d'exécution d'une suite d'instructions est la somme des temps d'exécution de chaque instruction.

Le temps d'exécution d'une instruction conditionnelle du type **if text : instructions 1** suivi de **else : instructions 2** est inférieur ou égal au maximum du temps d'exécution de **instructions 1** et **instructions 2** plus le temps d'exécution du test.

Le temps d'exécution d'une boucle **for i in range(p) : instructions** est **p** fois le temps d'exécution de **instructions** si ce temps est constant plus **p** (le nombre d'affectations pour la variable **i**). Si le temps d'exécution de **instruction** dépend de la valeur de **p**, l'étude se ramène au cas par cas.

Enfin, pour une boucle **while** l'étude se ramène aussi au cas par cas.

L'évaluation du temps d'exécution d'un algorithme se réduit ainsi à une évaluation en fonction d'un nombre n (entier représentant la taille des données en entrée), du nombre total d'opérations élémentaires noté u_n . Le niveau de complexité correspond au type de croissance de la suite (u_n) .

Suivant les valeurs de l'entrée, u_n peut prendre des valeurs très différentes. Si, par exemple, nous parcourons une liste à l'aide d'une boucle, à la recherche d'un élément, celui-ci peut se trouver en premier et nous sortons de la boucle, c'est **le cas le plus favorable**.

Il peut se trouver à la fin de la liste, c'est **le pire des cas**.

2. Niveaux de complexité

Considérons deux suites (u_n) et (v_n) . On suppose qu'aucune des deux suites ne s'annulent à partir d'un certain rang de n .

• Notion de grand O

Si le rapport $\left| \frac{u_n}{v_n} \right|$ est borné à partir d'un certain rang de n , alors $u_n = O(v_n)$.

(On dit que u_n est un grand O de v_n quand n tend vers $+\infty$).

On peut l'écrire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq K|v_n|.$$

Par exemple, si l'on pose $u_n = n + 2024 \ln n$ et $v_n = 2n$, $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \left| \frac{n + 2024 \ln n}{2n} \right| = \frac{1}{2} + \frac{2024 \ln n}{2n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2024 \ln n}{2n} < 1$ pour $n \geq N$.

$$\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow u_n = O(v_n).$$

On peut remarquer que le cas le plus courant pour avoir $u_n = O(v_n)$ est de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

où l est un réel fini.

Un cas particulier important est $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on écrit alors $u_n = o(v_n)$ et on dit que u_n est un petit o de v_n . Par exemple on a : $n = o(n^2)$.

On remarquera que $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$ mais on n'a pas la réciproque.

Par exemple si $u_n = n^2$ et $v_n = n^2 + n$, il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et donc $n^2 = O(n^2 + n)$ mais par contre : $n^2 \neq o(n^2 + n)$.

- **Complexité constante**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(1)$, cela signifie que le temps d'exécution est borné (indépendant de n). Par exemple, c'est le cas pour obtenir le premier élément d'une liste.

- **Complexité logarithmique**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(\ln n)$, on peut aussi écrire de façon équivalente, $u_n = O(\ln_2 n)$ ou $u_n = O(\ln_{10} n)$. On rappelle que $\ln_p n = \frac{\ln n}{\ln p}$. On double le temps d'exécution en élevant au carré la taille des données. C'est le cas avec la recherche dichotomique. On prend un intervalle où se situe l'élément cherché puis on coupe l'intervalle en deux puis encore en deux etc. en prenant soin que l'élément cherché est toujours dedans. La dichotomie est développée dans le cours plus tard dans l'année.

- **Complexité linéaire**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(n)$. Par exemple, on a une complexité linéaire pour le calcul de la somme de n termes avec une boucle non conditionnelle.

- **Complexité log-linéaire ou linéarithmique**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(n \ln n)$. C'est la complexité du meilleur tri par comparaison qu'il soit, c'est-à-dire le tri fusion. Ce sera vu en fin d'année ou en TSI2.

- **Complexité quadratique**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(n^2)$. Beaucoup d'algorithmes classiques ont cette complexité : le tri-bulle par exemple vu au chapitre 4. Généralement deux boucles imbriquées engendrent une telle complexité.

- **Complexité exponentielle**

Si pour $n \rightarrow +\infty$, $u_n = O(2^n)$ ou $u_n = O(k^n)$ avec $k > 1$. Ces algorithmes sont en pratique inutilisables pour de grandes valeurs de n .

3. Quelques exemples typiques

On a dit que généralement deux boucles imbriquées engendrent une complexité quadratique. Essayons de préciser.

```
In [3]: def Programmons01(n, k):
...:     a = 0
...:     for i in range(n):
...:         for j in range(k):
...:             a += i*j
...:     return a
```

Par exemple **Programmons01(5,3)** retourne **30**. On suppose ici que k est fixé. Il y a une opération d'affectation au départ. Puis il y a n passages dans la boucle externe. À chaque passage dans cette boucle, on passe dans la boucle interne qui fait k multiplications puis k additions et k affectations. Au total, on a $u_n = 1 + 3kn$ opérations. On a alors $u_n = O(n)$. Par rapport à n , la complexité est linéaire.

```
In [5]: def Programmons02(n):
...:     a = 0
...:     for i in range(n):
...:         for j in range(n):
...:             a += i*j
...:     return a
```

Par exemple **Programmons02(5)** retourne **100**. Il y a une opération d'affectation au départ. Puis il y a n passages dans la boucle externe. À chaque passage dans cette boucle, on passe dans la boucle interne qui fait n multiplications puis n additions et n affectations. Au total, on a $u_n = 1 + n.3n = 1 + 3n^2$ opérations. On a alors $u_n = O(n^2)$. Par rapport à n , la complexité est quadratique.

```
In [8]: def Programmons03(n):
...:     a = 0
...:     for i in range(n):
...:         for j in range(i):
...:             a += i*j
...:     return a
```

Par exemple **Programmons03(5)** retourne **35**. Il y a une opération d'affectation au départ. Puis il y a n passages dans la boucle externe. À chaque passage dans cette boucle, on passe dans la boucle interne qui fait i multiplications puis i additions et i affectations. Au total, on a :

$$u_n = 1 + \sum_{i=1}^n 3i = 1 + \frac{3}{2}n(n+1)$$

opérations. On a encore $u_n = O(n^2)$. Par rapport à n , la complexité est encore quadratique.

Chapitre 9

Sorting recursionless

■ Objectifs

Les incontournables :
savoir

Cours

Le tri de données constitue l'un des problèmes fondamentaux de l'algorithmique. On considère une liste de données, auxquelles sont attachées des clés. On cherche à trier ces données en fonction des clés (par exemple, trier une liste d'élèves par ordre alphabétique, ou par ordre de moyennes...). Nous nous placerons pour simplifier dans le cas où la clé est la donnée elle-même.

■ Tri par sélection

Principe du tri par sélection

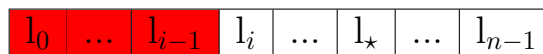
Considérons une liste l de longueur n . Supposons que la plage $l[0..i-1]$

- soit triée
- contienne les i plus petits éléments de la liste

On initialise avec $i = 0$ ce qui permet de se calquer sur l'indexation par défaut des listes pour Python, $l[0]$ est le premier élément de la liste l .

On sélectionne, dans la sous-liste $l[i..n-1]$ le plus petit élément, que l'on permute avec l_i .

Sur le schéma plus bas, la partie en rouge est déjà triée et on permute alors l_i et l_* qui est le plus petit élément de $l[i..n-1]$.



Programmation

Commençons par écrire une fonction qui détermine l'indice du plus petit élément d'une liste entre les positions i et j .

```
In [1]: def cherche_ind_min(l, i, j):
...:     """renvoie l'indice du plus petit element de la sous-
...:         liste l[i..j]"""
...:     imin = i
...:     for k in range(i+1, j+1):
...:         if l[k] < l[imin]:
...:             imin = k
...:     return imin
In [2]: cherche_ind_min([-3, 7, 11, 0, 4, 7, 0, 5, 8, 1], 1, 4)
Out [2]: 3
In [3]: cherche_ind_min([-3, 7, 11, 0, 4, 7, 0, 5, 8, 1], 0, 9)
Out [3]: 0
```

Nous pouvons écrire alors la fonction de tri.

```

In [5]: def tri_selection(l):
...:     """trie la liste l par l'algorithm du tri selection ,
...:         la fonction modifie la liste l"""
...:     n = len(l)
...:     for i in range(n-1):
...:         imin = cherche_ind_min(l, i, n-1)
...:         l[i], l[imin] = l[imin], l[i]
...:     return l
In [6]: tri_selection([-3, 7, 11, 0, 4, 7, 0, 5, 8, 1])
Out[6]: [-3, 0, 0, 1, 4, 5, 7, 7, 8, 11]

```

Rappelons que, lors de l'écriture d'un algorithme, on doit être en mesure de justifier sa terminaison. C'est ici évident car on a une boucle inconditionnelle (boucle *for*) qui se termine toujours (contrairement à une boucle *while*).

Remarque : Lorsque les données à trier sont distinctes des clés utilisées pour trier la liste (par exemple, un élève n'est pas égal à sa moyenne), on peut s'intéresser à ce qui arrive à deux éléments ayant la même clé (deux élèves ayant la même moyenne) : après le tri, ces deux éléments sont-ils dans la même position relative l'un par rapport à l'autre qu'avant le tri ? Lorsque c'est le cas, on dit que le tri est **stable**. Le tri par sélection n'est pas stable : par exemple si les données sont A , B et C , et que les clés attachées sont 1, 1 et 0, (ce que l'on notera par A_1 , B_1 et C_0), le tri par sélection part de $[A_1, B_1, C_0]$ qui devient $[C_0, B_1, A_1]$ car le minimum de (A_1, B_1, C_0) est C_0 qui permute avec A_1 .

Complexité

Calculons la complexité de cet algorithme en nous intéressant au nombre de comparaisons effectuées.

- la fonction *cherche_ind_min* appelée avec les arguments i et j , effectue $j - i$ comparaisons. Quand elle est appelée entre i et $n - 1$, elle en effectue $n - i - 1$.
- chaque passage dans la boucle indexée par i de la fonction *tri_selection* effectue donc $n - i - 1$ comparaisons. Comme i varie de 0 à $n - 2$, il y a au total :

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \text{ comparaisons.}$$

La complexité vérifie $C(n) \in O(n^2)$. On parle de **complexité quadratique**.

Ce tri est donc peu efficace. Si la taille est multipliée par deux, le temps d'exécution est multiplié par 4.

Exercice 01. Trier A, B, C, D, E, F, G de clés respectives 1, 3, 8, 1, -2, 3, 5 à la main par le tri selection. On pourra noter la liste $[A_1, B_3, C_8, D_1, E_{-2}, F_3, G_5]$

■ Tri par insertion

Principe du tri par insertion

C'est le tri du joueur de cartes qui reçoit ses cartes une à une. Le premier élément constitue une liste triée à lui tout seul. On compare ensuite le deuxième élément au premier pour savoir si on l'insère avant ou après le premier. À la $k^{\text{ème}}$ itération, on insère le $k + 1^{\text{ème}}$ élément l_k dans la plage, déjà triée, des k premiers éléments, identifiée en rouge et ainsi de suite.



Programmation

```
In [1]: def tri_insertion(l):
...:     """trie la liste l par algorithme du tri selection,
...:     la fonction modifie la liste l"""
...:     n = len(l)
...:     for k in range(1,n):
...:         a_placer = l[k]
...:         i = k-1
...:         while i >= 0 and a_placer < l[i]:
...:             l[i+1] = l[i]
...:             i = i-1
...:         l[i+1] = a_placer
...:     return l
```

```
In [2]: tri_insertion([-1,-5,4,-7,1,10,8,0])
Out[2]: [-7, -5, -1, 0, 1, 4, 8, 10]
```

Analysons la terminaison du programme :

- la boucle *for* se termine ;
- la boucle *while* aussi car même si l'on ne trouve aucun indice i tel que l_i soit strictement supérieur à l'élément à placer, i diminue strictement à chaque étape donc finira par devenir négatif, ce qui terminera la boucle.

Remarquons d'ailleurs que l'ordre dans lequel les conditions sont écrites n'est pas anodin : on vérifie d'abord que $i \geq 0$ puis on lit l'élément dans la case d'indice -1 , ce qui provoquerait une erreur).

Remarque : A la différence du tri par selection, le tri par insertion est stable : un élément de clé c ne peut passer devant un autre élément que si cet autre élément est de clé $c' > c$. Deux éléments de même clé ne sont jamais permutés.

Complexité

À la différence du tri par sélection, la complexité n'est pas la même pour toutes les listes de taille n . Nous allons étudier la complexité $C_{min}(n)$ dans le **meilleur des cas** et la complexité $C_{max}(n)$ dans le **pire des cas** (toujours en nous intéressant au nombre de comparaisons effectués entre éléments du tableau).

Dans le meilleur des cas, chaque élément l_k ($k \geq 1$) est comparé à son prédécesseur et reste à sa place car $l_k \geq l_{k-1}$. Ce cas se produit lorsque le tableau est déjà trié ; la complexité est alors

$$C_{min}(n) = n - 1.$$

(On parle de complexité linéaire).

Dans le pire des cas, chaque élément l_k ($k \geq 1$) est comparé à ses prédécesseurs et est finalement inséré en tête de liste. Ce cas se produit lorsque la liste est initialement triée à l'envers.

La complexité est alors : $C_{max}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

C'est encore une complexité quadratique (comme pour le tri par sélection).

Exercice 02. Trier A, B, C, D de clés respectives 1, 3, 8, 1 à la main par le tri insertion. On détaillera les différentes affectations et on pourra noter la liste $[A_1, B_3, C_8, D_1]$.

Exemple. Nous allons comparer le temps d'exécution du tri par insertion, par sélection et par l'attribut prédéfini `sort` en utilisant le module `time`.

```
In [3]: from time import perf_counter as pc
In [4]: l = [2,1,4,0,8,4,-4,7,5,8,7,10,0,-4,-5,-8,4,11,7,9]
In [5]: t = pc( ); print(tri_selection(l)) ; print(pc( ) - t)

[-8,-5,-4,-4,0, 0,1,2, 4,4,4, 5,7,7,7,8,8,9,10,11]
0.0007508000001053006

In [6]: new_l = [2,1,4,0,8,4,-4,7,5,8,7,10,0,-4,-5,-8,4,11,7,9]

In [10]: t = pc( ); print(tri_insertion(new_l)) ; print(pc( )-t)
[-8,-5,-4,-4,0,0,1, 2, 4, 4, 4,5,7,7,7,8,8,9,10,11]
0.00032749999991210643
# on voit que l'ordre de grandeur est le meme pour le tri
  selection et le tri insertion.

In [11]: new2_l =
    [2,1,4,0,8,4,-4,7,5,8,7,10,0,-4,-5,-8,4,11,7,9]
In [12]: t = pc( ); print(new2_l.sort()) ; print(pc( ) - t)
None
0.0016777000000729458

In [13]: new2_l
Out [13]: [-8, -5, -4, -4, 0, 0, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11]
In [14]: new2_l.sort()

In [15]: 0.0016777/0.00075
Out [15]: 2.2369333333333334
# un peu plus rapide avec la fonction sort
```

■ Complexité minimale d'un algorithme de tri

Les deux algorithmes de tri que nous avons étudiés ont une complexité $C_{max}(n)$ en $O(n^2)$. Peut-on faire mieux ? Oui : nous étudierons plus tard quand la récursivité sera traitée des algorithmes dont la complexité maximale vérifie $C_{max}(n) \in O(n \ln n)$.

Ces algorithmes seront optimaux au sens suivant :

Théorème

Un algorithme de tri procédant par comparaisons entre les clés des éléments à trier a, au mieux, une complexité $C_{max}(n) \in O(n \ln n)$.

La preuve utilise la notion d'arbre de décision.

Arbres binaires

Définition : Un arbre binaire est un ensemble de **noeuds**, organisés de la façon suivante :

- un noeud et un seul n'est pointé par aucune flèche, c'est la **racine** de l'arbre ;
- de certains noeuds (appelés **noeuds internes**) partent une flèche gauche et une flèche droite, pointant chacune sur un noeud (ce sont les **fil**s du noeud interne) ;
- des autres noeuds (appelés **feuilles**) ne part aucune flèche.

Cette structure est utilisée pour représenter des données. Elle contient de l'information, stockée dans les feuilles et les noeuds internes (ce sont les **etiquettes** de l'arbre) et dans les flèches (ce sont les labels de l'arbre).

Exemple : Voici un exemple d'arbre binaire :

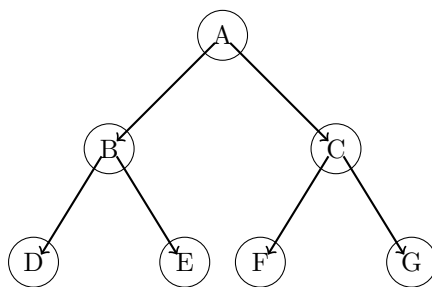


Figure 1

Cet arbre est formé de trois noeuds internes A , B et C , et de quatre feuilles D , E , F et G . Le noeud A est la racine de l'arbre ; le sous-arbre pointé par la flèche AB est le fils gauche du noeud A ; le sous-arbre pointé par la flèche AC est son fils droit. Ces deux sous-arbres ont pour père le noeud A .

Définition : La **hauteur** d'un arbre est la longueur (ie nombre de flèches) maximale d'un chemin allant de la racine à une feuille.

Quelle est la hauteur de l'arbre de l'exemple précédent ?

Exercice 03. Représenter deux arbres de hauteur 4, le premier ayant $4 + 1$ feuilles et le second 2^4 feuilles.

Proposition

Un arbre de hauteur n a donc au moins $n + 1$ feuilles (cas où chaque fils gauche est une feuille par exemple) et au plus 2^n feuilles (cas où tous les noeuds sauf ceux du bas, ont 2 fils).

Preuve : représenter les cas extrêmes en s'inspirant de l'exercice précédent.

Arbre de décision

On désire faire un choix dans un ensemble E de cardinal $n \neq 0$. Un **arbre de décision** associé à ce choix est un arbre binaire tel que :

- la racine est étiquetée par l'ensemble E
- chaque feuille est étiquetée par un singleton inclus dans E
- chaque noeud qui n'est point une feuille est étiqueté par un sous-ensemble E_1 de E et ses deux fils par des sous-ensembles E_2 et E_3 de E_1 tels que $E_1 = E_2 \cup E_3$. Attention, E_2 et E_3 ne sont pas nécessairement disjoints.
- On adjoint à chaque noeud un test booléen et les deux flèches issues de ce noeud portent les labels T ou F pour *True* ou *False*.

Exercice 04. Faire un arbre de décision pour la recherche de $\min(a, b, c)$, c'est-à-dire associé au choix du plus petit parmi les nombres a, b et c .

Proposition

Un arbre de décision associé à un ensemble de cardinal n doit posséder n feuilles au moins ; sa hauteur h vérifie : $h \geq \log_2(n)$.

Utilisons maintenant un arbre de décision pour le problème du tri d'une liste l de taille n . En supposant les éléments deux à deux distincts, il y a $n!$ listes différentes contenant ces éléments donc $n!$ feuilles. Chacune de ces feuilles est constituée d'une permutation de la liste l . Trier la liste revient à trouver, parmi les $n!$ permutations de l , quelle est celle qui est triée. Notre arbre de décision a pour ensemble de référence l'ensemble E des permutations de l ; les tests associés à chaque noeud sont les tests comparant deux éléments du tableau. La hauteur minimale de l'arbre de décision est donc supérieure ou égale à

$$\log_2(n!) = \sum_{k=2}^n \log_2(k).$$

Or la croissance de \ln permet d'écrire :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

Et en sommant :

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

C'est-à-dire :

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t \, dt.$$

Il reste à intégrer en rappelant qu'une primitive de $\ln t$ est $t \ln t - t$:

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - 2(\ln 2 - 1).$$

Puis cela donne en divisant par $n \ln n$:

$$\frac{n \ln n - n + 1}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \frac{(n+1) \ln(n+1) - 2(\ln 2 - 1)}{n \ln n}.$$

On voit rapidement que quand n tend vers $+\infty$, $\frac{n \ln n - n + 1}{n \ln n}$ et $\frac{(n+1) \ln(n+1) - 2(\ln 2 - 1)}{n \ln n}$ tendent vers 1. Donc d'après le théorème des Gendarmes,

$$\ln(n!) \sim n \ln n \Rightarrow \log_2(n!) \sim n \log_2(n).$$

Comme le nombre de comparaisons dans le pire des cas est égal à la hauteur de l'arbre de décision, nous avons démontré le théorème.

■ Tris sans comparaison

Les tris présentés auparavant sont des tris qui utilisent les comparaisons. Il existe d'autres types de tris par exemple par comptage, par paquets, par base. Présentons ici le tri par comptage.

On dispose d'une liste d'entiers naturels qui sont tous inférieurs à un entier naturel non nul m qui est de l'ordre de n qui est la taille de la liste.

On commence par écrire une fonction **comptage**, d'arguments une liste **entiers** et un entier **m**, renvoyant une liste de longueur **m+1** telle que pour tout 'k de 0 à m , l'élément d'indice **k** a pour valeur le nombre d'occurrences de l'entier **k** dans la liste **entiers**. Pour cela, on crée une liste composée de 0 et de longueur $m + 1$. Chaque élément de cette liste sert de compteur.

Commençons par une première version nommée **comptage**

```
In [1]: def comptage(entiers ,m):
...:     compteurs = (m+1) * [0]
...:     for k in range(m+1):
...:         cpt = 0
...:         for p in entiers :
...:             if p == k :
...:                 cpt = cpt + 1
...:             compteurs[k] = cpt
...:     return compteurs
...:
```

Exercice 05 Appliquer à la main **comptage** à la liste `[1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2]` avec $m=3$ puis $m=7$ puis $m=17$. Qu'obtient-on ?

SOLUTION :

```
In [15]: comptage([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],17)
Out[15]: [3, 4, 2, 0, 4, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

In [16]: comptage([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],7)
Out[16]: [3, 4, 2, 0, 4, 1, 0, 2]

In [17]: comptage([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],3)
Out[17]: [3, 4, 2, 0]
```



```
In [10]: def tri(entiers,m):
...:     cpts = new_comptage(entiers , m)
...:     trie = []
...:     for i in range(m+1):
...:         trie = trie + cpts[i] * [i]
...:     return trie
...:
```

```
In [21]: tri([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],17)
Out[21]: [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 7, 7]
```

```
In [22]: tri([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],22)
Out[22]: [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 7, 7]
```

```
In [23]: tri([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],7)
Out[23]: [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 7, 7]
```

```
In [24]: tri([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],3)
Traceback (most recent call last):
```

```
File "<ipython-input-24-14d2f94d5f27>", line 1, in <module>
    tri([1,2,4,5,4,1,0,1,0,0,7,1,4,4,7,2],3)
```

```
File "<ipython-input-9-42b405eef969>", line 2, in tri
    cpts = new_comptage(entiers , m)
```

```
File "<ipython-input-5-de8aff887c7b>", line 4, in new_comptage
    compteurs[k] = compteurs[k] + 1
```

```
IndexError: list index out of range
```


Chapitre **10**

Algorithm of Gauss

■ Objectifs

Les incontournables :
savoir

Cours

Il s'agit de créer une fonction Python qui permet de résoudre un système linéaire avec la méthode de Gauß. Mais auparavant, on va faire fonctionner la syntaxe autour des matrices puis on va créer les opérations élémentaires classiques sur les lignes et colonnes de matrices.

Pour la culture, parlons de Gauß

Nom de naissance Johann Carl Friedrich Gauß

Naissance 30 avril 1777 Brunswick (Principauté de Brunswick-Wolfenbüttel)

Décès 23 février 1855 (à 77 ans) Göttingen (Royaume de Hanovre)

Nationalité : Allemand

Domaines : Astronomie, mathématiques, physique

Lieu de travail : Université de Göttingen

Diplôme : Université de Helmstedt

■ Les codes Python autour des matrices

Comment écrire puis manipuler des matrices avec Python

On travaille surtout avec `numpy` et son sous-module `numpy.linalg` entrevus dans un chapitre antérieur. Rappelons ce que l'on tape toujours au début.

```
In [1]: import numpy as np ; import numpy.linalg as alg
```

Dans la suite, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dont les lignes sont les listes L_0, \dots, L_{n-1} , toutes de même taille p et les colonnes sont les listes C_0, \dots, C_{p-1} toutes de même taille n .

Attention, en Math, les indices partent conventionnellement de 1 mais en Python de 0 donc ici tous nos indices démarreront à 0 pour ne pas faire des mélanges.

☞ Pour *définir la matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, sous `numpy`, on tape un code (en rentrant les listes de ligne) de la forme $A = np.array([L_0, \dots, L_{n-1}])$ Ainsi :

```
In [10]: A = np.array([[1, 2, 4, 7], [1, 0, -1, 8], [4, 0, 1, 2]])
In [11]: A
Out[11]:
array([[ 1,  2,  4,  7],
       [ 1,  0, -1,  8],
       [ 4,  0,  1,  2]])
```

☞ La commande `A.shape` donne la *taille* (n, p) de A . La commande `A.size` renvoie $n \times p$, `np.size(A, 0)` (*resp.* `np.size(A, 1)`) renvoie n (*resp.* p).

☞ Le *coefficient* de A à l'intersection de la ligne L_i et colonne C_j est `A[i, j]`.

☞ Le code `A[i, :]` (ou aussi `A[i]`) est la *ligne* L_i (tableau à une dimension) de A .

☞ Le code `A[:, j]` est la *colonne* C_j (tableau à une dimension) de A .

- ☞ Le code `A[i:j, k:l]` renvoie la *sous-matrice* de la ligne L_i à la ligne L_{j-1} et de la colonne C_k à la colonne C_{l-1} .
- ☞ Le code `np.zeros((n,p))` renvoie la *matrice nulle* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et `np.eye(n)` renvoie I_n , la matrice identité d'ordre n .
- ☞ Le code `np.ones((n,p))` renvoie la matrice Attila (composée que de 1) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- ☞ Le code `np.diag(L)` renvoie la *matrice carrée diagonale* dont les coefficients de la diagonale principale sont les éléments de la liste L dans l'ordre.

```
In [5]: Attila = np.ones((5,5))
In [7]: Ident = np.eye(5)
In [8]: Diag = np.diag([2025,2025,2025])
```

```
In [9]: Attila, Ident, Diag
Out[9]:
(array([[1., 1., 1., 1., 1.],
        [1., 1., 1., 1., 1.],
        [1., 1., 1., 1., 1.],
        [1., 1., 1., 1., 1.],
        [1., 1., 1., 1., 1.]]) ,
 array([[1., 0., 0., 0., 0.],
        [0., 1., 0., 0., 0.],
        [0., 0., 1., 0., 0.],
        [0., 0., 0., 1., 0.],
        [0., 0., 0., 0., 1.]]) ,
 array([[2025, 0, 0],
        [ 0, 2025, 0],
        [ 0, 0, 2025]]))
```

- ☞ Si l'on veut réunir des matrices A et B (donc les *concatener*), en tapant le code `np.concatenate((A,B),axis=0)`, on renvoie $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et si l'on fait le code `np.concatenate((A,B),axis=1)`, on renvoie $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$.
Ce sont des codes utiles pour appliquer la méthode de Gauss-Jordan.
- ☞ Pour *ajouter* les matrices A et B , on tape `A+B` tout simplement et pour renvoyer $3A$ par exemple, on tape `3*A`
- ☞ Pour *effectuer le produit matriciel* $A \times B$, on tape `np.dot(A,B)` ou encore `A.dot(B)`. Pour calculer le produit de trois matrices A, B et C , on tape `A.dot(B).dot(C)` Pour calculer A^n , on peut utiliser la fonction `matrix_power` en tapant `alg.matrix_power(A,n)`
- ☞ Pour calculer la *transposée* de A , on tape `np.transpose(A)`
(on peut aussi utiliser l'attribut `T` en écrivant `A.T`)
Remarque : une application de `np.transpose` est de convertir un tableau-ligne en tableau-colonne (ou le contraire). Cela peut être utile.
Calculons la transposée avec `np.transpose(A)`

```

In [10]: A = np.array([[1,2,4,7],[1,0,-1,8],[4,0,1,2]])
In [11]: A
Out[11]:
array([[ 1,  2,  4,  7],
       [ 1,  0, -1,  8],
       [ 4,  0,  1,  2]])
In [12]: np.transpose(A)
Out[12]:
array([[ 1,  1,  4],
       [ 2,  0,  0],
       [ 4, -1,  1],
       [ 7,  8,  2]])

```

Calculons la transposée avec `A.T`

```

In [13]: A.T
Out[13]:
array([[ 1,  1,  4],
       [ 2,  0,  0],
       [ 4, -1,  1],
       [ 7,  8,  2]])

```

- ☞ Pour calculer directement le *déterminant* de A (si $n = p$), on tape `alg.det(A)`
- ☞ Pour calculer directement le *rang* de A , on tape `alg.matrix_rank(A)`
- ☞ Pour calculer directement la *trace* de A , on tape `np.trace(A)`
- ☞ Pour calculer *l'inverse* de A (si $n = p$), on tape `alg.inv(A)`
- ☞ Pour appliquer une fonction f à tous les coefficients de $A = (a_{i,j})$, on tape `f(A)`

Exemple 01 : On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Rentrans les matrices A et B et donnons le nombre de lignes de A et de colonnes de B sous Python.

```

# QUESTION 01
In [2]: A = np.array([[1,-1,0],[-2,4,1],[0,3,-5]])
In [3]: A
Out[3]: array([[ 1, -1,  0],
              [-2,  4,  1],
              [ 0,  3, -5]])
In [4]: B = np.array([[1,0],[1,3],[-1,2]])
In [5]: np.size(A,0), np.size(B,1)
Out[5]: (3, 2)

```

3. Renvoyons la ligne L_2 et la colonne C_1 de A .
Extrayons la sous-matrice issue de A en supprimant L_2 et C_2 .

```
# QUESTION 02
In [15]: A[2,:] ; A[:,1] ;
Out[15]: array([ 0,  3, -5]) array([-1,  4,  3])
In [21]: A[0:1,0:1]
Out[21]: array([[1]])
In [22]: A[0:2,0:2]
Out[22]: array([[ 1, -1], [-2,  4]])
```

4. Concaténon ensemble B et une colonne de trois zéros. On obtient alors une matrice carrée d'ordre 3 que l'on appellera C .

```
# QUESTION 03
In [7]: C = np.concatenate((B,np.zeros((3,1))), axis = 1)
In [8]: C
Out[8]: array([[ 1.,  0.,  0.],
               [ 1.,  3.,  0.],
               [-1.,  2.,  0.]])
```

4. Renvoyons $A + C$ et AC

```
# QUESTION 04
In [10]: A+C
Out[10]: array([[ 2., -1.,  0.],
               [-1.,  7.,  1.],
               [-1.,  5., -5.]])
In [11]: A.dot(C)
Out[11]: array([[ 0., -3.,  0.], [ 1., 14.,  0.], [ 8., -1.,
               0.]])
```

5. Calculons avec Python A^{-1} et C^{-1} . que remarque t-on ?

```
# QUESTION 05
In [12]: alg.inv(A)
Out[12]: array([[ 1.76923077,  0.38461538,  0.07692308],
               [ 0.76923077,  0.38461538,  0.07692308],
               [ 0.46153846,  0.23076923, -0.15384615]])
```

```
In [13]: alg.inv(C)
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-19-8f1fbdad274e>", line 1, in <module>
    alg.inv(C)
  File "<__array_function__ internals>", line 5, in inv
  File "C:\Users\damin\Anaconda3\lib\site-packages\numpy\linalg\
    linalg.py", line 547, in inv
    ainv = _umath_linalg.inv(a, signature=signature, extobj=
        extobj)
  File "C:\Users\damin\Anaconda3\lib\site-packages\numpy\linalg\
    linalg.py", line 97, in _raise_linalgerror_singular
    raise LinAlgError("Singular matrix")
LinAlgError: Singular matrix
```

6. Calculons A^7 avec Python

```
# QUESTION 06
In [14]: alg.matrix_power(A,7)
Out[14]: array([[ 6929, -14365,  676],
                [-28730,  47996,  18421],
                [ 4056,  55263, -116441]])
```

7. Construisons la fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ en Python puis écrivons le code qui permet de renvoyer la matrice dont tous les coefficients sont les images par f des coefficients de A .

```
# QUESTION 07
In [18]: def f(x):
...:     return np.exp(2*x)
In [20]: f(A)
Out[20]: array([[7.38905610e+00, 1.35335283e-01, 1.00000000e+00],
                [1.83156389e-02, 2.98095799e+03, 7.38905610e+00],
                [1.00000000e+00, 4.03428793e+02, 4.53999298e-05]])
```

■ Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes en code Python

Si i et j sont deux entiers distincts dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a les opérations sur les lignes :

$$\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i, \quad L_i \leftrightarrow L_j.}$$

Si i et j sont deux entiers distincts dans $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a les opérations sur les colonnes :

$$\boxed{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j, \quad C_i \leftarrow \lambda C_i, \quad C_i \leftrightarrow C_j.}$$

Comment écrire en langage Python les opérations élémentaires classiques sur les lignes

Il s'agit de créer les fonctions $L_i \leftarrow L_i + xL_j$, $L_i \leftarrow xL_i$ et $L_i \leftrightarrow L_j$.

☞ Pour effectuer la transvection $L_i \leftarrow L_i + xL_j$ sur une matrice A , on tapera :

```
# VERSION LONGUE
In [23]: def old_transvecligne(A,i,j,x) :
...:     p = np.size(A,1)
...:     for m in range(p) :
...:         A[i,m] = A[i,m] + x*A[j,m]
...:     return A
# VERSION COURTE
In [26]: def transvecligne(A,i,j,x):
...:     A[i,:] = A[i,:] + x*A[j,:]
...:     return A
```

Exemple 02 : Appliquons $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ avec `old_transvecligne` ou `transvecligne`

```
In [24]: A
Out[24]:
array([[ 1, -1,  0],
       [-2,  4,  1],
       [ 0,  3, -5]])
In [25]: transvecligne(A,1,2,-1)
Out[25]:
array([[ 1, -1,  0],
       [-2,  1,  6],
       [ 0,  3, -5]])
In [27]: A
Out[27]:
array([[ 1, -1,  0],
       [-2,  1,  6],
       [ 0,  3, -5]])
# Warning A is transformed
```

☞ Pour effectuer la dilatation $L_i \leftarrow xL_i$ sur A , on tape (version courte directe) :

```
In [29]: def dilatligne(A,i,x):
...:     A[i,:] = x * A[i,:]
...:     return A
```

Exemple 03. Par exemple, dilatoons la ligne L_1 de la matrice Attila `np.ones((3,5))` avec $x = 1024$

```
In [30]: dilatligne(np.ones((3,5)),1,2024)
Out[30]:
array([[1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00],
       [2.024e+03, 2.024e+03, 2.024e+03, 2.024e+03, 2.024e+03],
       [1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00, 1.000e+00]])
```

☞ Pour *effectuer la permutation* $L_i \leftrightarrow L_j$ sur A , on tape :

```
# VERSION LONGUE
In [34]: def old_permutligne(A,i,j):
...:     p = np.size(A,1)
...:     for m in range(p):
...:         temp=A[i,m];A[i,m]=A[j,m];A[j,m]=temp
...:     return A
# VERSION COURTE
In [35]: def permutligne(A,i,j):
...:     A[i,:] , A[j,:] = np.copy(A[j,:]) , np.copy(A[i,:])
...:     return A
```

On remarque que dans la version alternative de `old_permutligne`, on a utilisé la fonction `np.copy` du module `numpy` (d'alias `np`). En effet, si l'on n'utilise pas `np.copy`, on se retrouverait avec une matrice ayant deux lignes égales.

Exemple 04. *Faisons fonctionner sur une matrice A , juste pour le fun.*

```
In [36]: A = np.array([[1, -1, 0],[-2, 4, 1],[0, 3, -5]])
In [37]: old_permutligne(A,0,2)
Out[37]:
array([[ 0,  3, -5],
       [-2,  4,  1],
       [ 1, -1,  0]])
In [38]: permutligne(A,1,2)
Out[38]:
array([[ 0,  3, -5],
       [ 1, -1,  0],
       [-2,  4,  1]])
```

☞ Pour *effectuer la transvection* $C_i \leftarrow C_i + kC_j$ sur A , on tape :

```
In [39]: def transveccolonne(A,i,j,k) :
...:     A[:,i] += k*A[:,j]
...:     return A
```

☞ Pour *effectuer la dilatation* $C_i \leftarrow kC_i$ sur A , on tape :

```
In [40]: def dilatcolonne(A,i,x) :
          A[:,i] = x * A[:,i]
          return A
```

☞ Pour *effectuer la permutation* $C_i \leftrightarrow C_j$ sur A , on tape :

```
In [41]: def permutcolonne(A,i,j) :
          A[:,i],A[:,j] = np.copy( A[:,j] ),np.copy(A[:,i])
          return A
```

Exemple 05. Appliquons alors à transformer la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ en I_3 en utilisant un certain nombre des six fonctions Python

```
In [42]: A = np.array([[1., -1., 3.],[0., 1., 2.],[-1., -2., 0.]])
In [43]: transveccolonne(A,1,0,1) , transveccolonne(A,2,0,-3)
In [44]: transveccolonne(A,2,1,-2) , dilatcolonne(A,2,1/9)
In [45]: transveccolonne(A,1,2,3) , transveccolonne(A,0,2,1)
Out[45]:
array([[1, 0, 0],[0, 1, 0],[0, 0, 1]])
```

On a effectué les opérations élémentaires suivantes dans l'ordre :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_0, C_2 \leftarrow C_2 - 3C_0, C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, C_2 \leftarrow \frac{1}{9}C_2, C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2, C_0 \leftarrow C_0 + C_2.$$

Application à l'algorithme de Gauß-Jordan pour inverser une matrice

Cette méthode permet aussi à la fois de prouver l'inversibilité et de trouver l'inverse. Matriciellement, les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à la multiplication à gauche par un certain nombre de matrices $Q_i \in GL_p(\mathbb{K})$ de la matrice A pour obtenir $Q_k Q_{k-1} \dots Q_1 A = I_p$, ce qui montre déjà que A est inversible (car elle possède un inverse à gauche) puis en multipliant à droite chacun des membres de cette égalité par A^{-1} , on obtient $A^{-1} = Q_k Q_{k-1} \dots Q_1$. Cela justifie le fait que A^{-1} se retrouve après opérations élémentaires sur les lignes dans la partie droite de la matrice à p lignes et $2p$ colonnes obtenue.

☞ On écrit d'abord la matrice à p lignes et $2p$ colonnes schématisée par $(A \mid I_p)$, le symbole $|$ étant juste une barrière virtuelle qui permet de distinguer les deux parties importantes de la matrice ;

☞ on transforme cette matrice par opérations élémentaires **sur les lignes** (sans se soucier de la barrière virtuelle) pour aboutir à la matrice schématisée par $(I_p \mid A^{-1})$.

Exemple 06 : *invertissons avec Python* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

SYNOPSIS : On commencera par concaténer A et I_3 et on utilisera les fonctions Python qui font les opérations élémentaires sur les lignes. À la fin, on déconcaténera.

```
# On rentre A et on concatene A et I3 en C
In [6]: A = np.array([[2,2,3],[1,1,4],[1,-2,1]])
In [8]: C = np.concatenate((A,np.eye(3)),axis = 1)
In [9]: C
Out[9]: array([[ 2.,  2.,  3.,  1.,  0.,  0.],
               [ 1.,  1.,  4.,  0.,  1.,  0.],
               [ 1., -2.,  1.,  0.,  0.,  1.]])
```

```
# C0 <-> C1
In [10]: permutligne(C,0,1)
Out[10]: array([[ 1.,  1.,  4.,  0.,  1.,  0.],
               [ 2.,  2.,  3.,  1.,  0.,  0.],
               [ 1., -2.,  1.,  0.,  0.,  1.]])
# L1 <- L1 - 2 L0 et L2 <- L2 - L0
In [11]: transvecligne(C,1,0,-2);transvecligne(C,2,0,-1)
Out[11]: array([[ 1.,  1.,  4.,  0.,  1.,  0.],
               [ 0.,  0., -5.,  1., -2.,  0.],
               [ 0., -3., -3.,  0., -1.,  1.]])
# C1 <-> C2
In [12]: permutligne(C,1,2)
Out[12]: array([[ 1.,  1.,  4.,  0.,  1.,  0.],
               [ 0., -3., -3.,  0., -1.,  1.],
               [ 0.,  0., -5.,  1., -2.,  0.]])
# L1 <- -1/3 L1 et L2 <- -1/5 L2
In [13]: dilatligne(C,1,-1/3);dilatligne(C,2,-1/5)
Out[13]: array([[ 1. ,  1. ,  4. ,  0. ,  1. ,  0. ],
               [-0. ,  1. ,  1. , -0. ,  0.33333333, -0.33333333],
               [-0. , -0. ,  1. , -0.2,  0.4 , -0.   ]])
# L1 <- L1 - L2 et L0 <- L0 - 4 L2
In [14]: transvecligne(C,1,2,-1);transvecligne(C,0,2,-4)
Out[14]: array([[ 1. ,  1. ,  0. ,  0.8 , -0.6 ,  0. ],
               [ 0. ,  1. ,  0. ,  0.2 , -0.06666667, -0.33333333],
               [-0. , -0. ,  1. , -0.2 ,  0.4 , -0.   ]])
# L0 <- L0 - L1
In [15]: transvecligne(C,0,1,-1)
Out[15]: array([[ 1. ,  0. ,  0. ,  0.6 , -0.53333333,  0.33333333],
               [ 0. ,  1. ,  0. ,  0.2 , -0.06666667, -0.33333333],
               [-0. , -0. ,  1. , -0.2,  0.4 , -0.   ]])
```

```

# Il reste a deconcatener
In [17]: C[0:3,3:6]
Out[17]:
array([[ 0.6          , -0.53333333,  0.33333333],
       [ 0.2          , -0.06666667, -0.33333333],
       [-0.2          ,  0.4          , -0.          ]])
# on remarque :
In [18]: -8/15 ; -1/15
Out[18]: -0.5333333333333333  -0.06666666666666667

```

On aboutit à la matrice C finale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9/15 & -8/15 & 5/15 \\ 0 & 1 & 0 & 3/15 & -1/15 & -5/15 \\ 0 & 0 & 1 & -3/15 & 6/15 & 0 \end{array} \right).$$

■ Algorithme du pivot de Gauß en code Python

Comment résoudre un système linéaire $AX = B$?

☞ On peut appliquer une *méthode directe* lorsque A est carrée et inversible en employant la fonction `solve` du sous-module `numpy.linalg`.

On tape : `alg.solve(A,B)`

Nous obtenons X sous forme d'un tableau-ligne.

Voir le premier exemple qui suit pour la mise en forme.

☞ On peut appliquer la *méthode du pivot de Gauß* et les fonctions qui ont été construites dans le paragraphe précédent. Voir la suite pour le programme Python correspondant.

Exemple 07. Utilisons le module `numpy` et sa fonction `solve` pour résoudre :

$$\begin{cases} 10^{-20}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

```

In [41]: A = np.array([[10**(-20), 1], [1, 1]])
In [42]: B = np.array([[1], [2]])
In [43]: alg.solve(A,B)
Out[42]:
array([[1.], [1.]])

```

Il est clair que le résultat est « arrondi ».

Passons à l'**algorithme de Gauß**. Nous allons résoudre le système linéaire de matrice A (carrée et inversible) et de second membre B par la méthode du pivot de Gauß. Bien entendu, si A s'avère non inversible, le programme renvoie un message d'erreur.

On peut sinon par exemple faire un test en tête de procédure en demandant le calcul du déterminant. S'il est nul, on renvoie un message qui demande de transformer notre système, par exemple en faisant passer des inconnues dans la matrice colonne B et A est ramené à une de ses sous-matrices inversibles. Nous laissons de côté un tel test pour ne pas surcharger le programme.

L'algorithme de Gauß (dit aussi du pivot de Gauß) est basé sur des opérations élémentaires sur les lignes (qui ne modifient pas le rang de A ni les inconnues).

On supposera ici que pour tout i , $A[i, i] \neq 0$.

☞ **Étape 1** : La première chose à faire est de concaténer A et B en $D = (A \mid B)$.

☞ **Étape 2** : On transforme D en une matrice triangulaire supérieure.

Le coefficient $D[0,0]$ est appelé premier pivot.

Pour i variant de 1 à $n - 1$, où $n = \text{np.size}(A,0)$, on retranche à L_i la ligne L_0 multipliée par $D[i,0]/D[0,0]$

On obtient donc une nouvelle colonne C_0 avec $D[0,0]$ et que des 0.

Puis on considère le nouveau $D[1,1]$ que l'on suppose encore non nul et on refait le même type d'opérations. On met tout ça dans une boucle **for j in range(n-1)**

À la fin, la matrice D devient triangulaire supérieure. À ce niveau, on peut en déduire en remontant la valeur des inconnues. La dernière ligne donne la valeur de la dernière inconnue, on remplace dans l'avant dernière équation. Ainsi de suite...

Mais on peut aussi passer à l'étape 3.

☞ **Étape 3** : On transforme D (sauf la dernière colonne) en matrice diagonale.

On considère $D[n-1,n-1]$ comme nouveau pivot et refaire l'algorithme du pivot de Gauß inversé (avec une boucle **for j in range(n-1,-1,-1)**)

À la fin, D devient une matrice diagonale (sauf sa dernière colonne) et en divisant par les coefficients diagonaux, ligne par ligne, la nouvelle dernière colonne de D sont les valeurs des inconnues.

Passons au programme Python. On crée une fonction appelée **systLin** qui résout le système linéaire de matrice A (carrée et inversible) et de second membre B par la méthode du pivot de Gauß complète c'est-à-dire que $(A \mid B)$ devient $(A' \mid B')$, où A' est diagonale et est la dernière modification de A et B' est la dernière modification de B qui contient les solutions à un coefficient multiplicatif près. Il reste à utiliser une des opérations élémentaires pour avoir les solutions.

Les tableaux A et B seront les arguments de **systLin**.

La fonction ne devra modifier ni la matrice A , ni la matrice B (il faudra en faire des copies, sur lesquelles on fera les opérations en posant **A1 = np.copy(A)** et **B1 = np.copy(B)**).

On pourra utiliser les fonctions Python correspondantes aux opérations élémentaires c'est-à-dire plus précisément **transvecligne** dans les deux boucles doubles. En sortie des dernières boucles doubles, on récupère $D[:,n]$ qui est la dernière colonne de D sous forme d'une liste. Puis le code **np.array([D[:,n]])** transforme $D[:,n]$ en matrice ligne. On appelle **NewB1** cette matrice ligne et on utilise **dilatcolonne** pour diviser toutes les colonnes C_s (donc ses coefficients) de **NewB1** par $D[s,s]$. On notera **sol** la matrice ligne solution.

Exemple 08 : On va tester **systLin** qui suit sur le système :

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ -2x + 4y + z & = & 4 \\ 3y - 5z & = & 0 \end{cases} .$$

```

In [1]: def systLin(A,B) :
        # on fait des copies de A et de B
        A1 = np.copy(A); B1 = np.copy(B)
        # on concatene ensemble A1 et B1 dans D
        D = np.concatenate((A1,B1),axis=1)
        print(D)
        n = np.size(A1,0)
        # On transforme D en une matrice triang sup
        for j in range(n-1) :
            for i in range(j+1,n) :
                print('le pivot est :',D[j,j])
                c = D[i,j]/D[j,j]
                print('on enleve a la ',i,'eme ligne ',c,'fois la ',j,'
                    eme ligne ')
                D = transvecligne(D,i,j,-c)
                print(D)
        # on transforme D (sauf derniere col) en matrice diag
        for j in range(n-1,0,-1) :
            for i in range(j-1,-1,-1) :
                c = D[i,j]/D[j,j]
                print('on enleve a la ',i,'eme ligne ',c,'fois la ',j,'
                    eme ligne ')
                D = transvecligne(D,i,j,-c)
                print(D)
        # On transforme la derniere colonne de D en matrice ligne
        NewB1 = np.array([D[:,n]])
        # On divise les lignes de NewB1 par les pivots successifs
        for s in range(n):
            Sol = dilatcolonne(NewB1,s,1./D[s,s])
        # On retourne alors les solutions du systeme
        return Sol

```

Warning : Attention, on rentre les coefficients des lignes de **A** et **B** sous forme de flottants (donc en rajoutant un `.`). En effet, sinon, il y aura des arrondis dans les divisions qui conduiront à un résultat erroné.

```

# PASSONS A EXEMPLE 08
In [2]: A = np.array([[1., -1., 0.], [-2., 4., 1.], [0., 3., -5.]])

In [3]: B = np.array([[1.], [4.], [0.]])

In [4]: systLin(A,B)

```

Et découvrons ensuite le résultat.

```

# on donne la matrice D produit du concatenage
[[ 1. -1.  0.  1.]
 [-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]

le pivot est : 1.0
on enleve a la 1 eme ligne -2.0 fois la  0 eme ligne
# on a fait L1 ← L1 + 2 L0
[[ 1. -1.  0.  1.]
 [ 0.  2.  1.  6.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]
le pivot est : 1.0
on enleve a la 2 eme ligne 0.0 fois la  0 eme ligne
# on a fait L2 ← L2 donc rien du tout
[[ 1. -1.  0.  1.]
 [ 0.  2.  1.  6.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]

le pivot est : 2.0
on enleve a la 2 eme ligne 1.5 fois la  1 eme ligne
# on a fait L2 ← L2 -3/2 L1
[[ 1.  -1.  0.  1. ]
 [ 0.  2.  1.  6. ]
 [ 0.  0. -6.5 -9. ]]

# on attaque la deuxieme double boucle celle de la remontada

on enleve a la 1 eme ligne -0.15384615384615385 fois la  2 eme ligne
[[ 1.          -1.          0.          1.          ]
 [ 0.          2.          0.          4.61538462]
 [ 0.          0.          -6.5         -9.          ]]

on enleve a la 0 eme ligne -0.0 fois la  2 eme ligne
[[ 1.          -1.          0.          1.          ]
 [ 0.          2.          0.          4.61538462]
 [ 0.          0.          -6.5         -9.          ]]

on enleve a la 0 eme ligne -0.5 fois la  1 eme ligne
[[ 1.          0.          0.          3.30769231]
 [ 0.          2.          0.          4.61538462]
 [ 0.          0.          -6.5         -9.          ]]

# la matrice newB1 est :
[[ 3.30769231  4.61538462 -9.  ]]
# puis on retourne sol
array([[3.30769231, 2.30769231, 1.38461538]])

```

Intéressons-nous maintenant à la **complexité algorithmique de la méthode du pivot de Gauß** en posant n la taille de la matrice A .

A l'intérieur des deux premières boucles imbriquées, on a une division et 2 appels à la fonction **transvecligne**, ce qui fait $2n+1$ opérations au plus. Comme les deux boucles imbriquées sont un $O(n^2)$, on a donc une complexité en $O(n^3)$.

A l'intérieur des deux autres boucles imbriquées, on a encore une division et 2 appels à **transvecligne** ce qui fait $2n+1$ opérations au plus. Comme les deux boucles imbriquées sont un $O(n^2)$, on a donc encore une complexité en $O(n^3)$. Et on a un appel à **dilatligne** dans la boucle extérieure, ce qui fait un $O(n^2)$.

Donc en sommant $O(n^3) + O(n^3) + O(n^2)$, on a une complexité totale de $O(n^3)$.

Pour votre culture, l'algorithme de Straßen, qui est en $O(n^{2.807})$ a une meilleure complexité algorithmique asymptotique.

Programme du pivot de Gauß amélioré

Commençons par illustrer avec un nouveau système.

Exemple 09. Testons **systLin** sur le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 5t = 1 \\ x - 4y - 2z + 6t = -2 \\ 3x + y - 2z + t = 3 \\ -2x + y - 4z + 3t = 2 \end{cases}$$

Que remarque t-on ?

```
In [23]: B = np.array([[1.],[ -2.],[3.],[2.]])
In [24]: A = np.array
          ([[1.,3.,2., -5],[1., -4., -2.,6.],[3.,1., -2.,1.],[ -2.,1., -4.,3.]])
In [25]: systLin(A,B)
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 1. -4. -2.  6. -2.]
 [ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]

le pivot est : 1.0

on enleve      la 1 me ligne 1.0 fois la  0 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.]
 [ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]
```

```

# ON CONTINUE
le pivot est : 1.0
on enleve la 2 me ligne 3.0 fois la 0 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.]
 [ 0. -8. -8. 16.  0.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]
le pivot est : 1.0

on enleve la 3 me ligne -2.0 fois la 0 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.]
 [ 0. -8. -8. 16.  0.]
 [ 0.  7.  0. -7.  4.]]

le pivot est : -7.0
on enleve la 2 me ligne 1.1428571428571428 fois la 1 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.  ]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.  ]
 [ 0.  0. -3.42857143  3.42857143  3.42857143]
 [ 0.  7.  0. -7.  4.  ]]
le pivot est : -7.0

on enleve la 3 me ligne -1.0 fois la 1 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.  ]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.  ]
 [ 0.  0. -3.42857143  3.42857143  3.42857143]
 [ 0.  0. -4.  4.  1.  ]]

le pivot est : -3.428571428571429
on enleve la 3 me ligne 1.1666666666666665 fois la 2 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.  ]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.  ]
 [ 0.  0. -3.42857143  3.42857143  3.42857143]
 [ 0.  0.  0.  0. -3.  ]]

on enleve la 2 me ligne inf fois la 3 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 0. -7. -4. 11. -3.]
 [nan nan nan nan inf]
 [ 0.  0.  0.  0. -3.]]
on enleve la 1 me ligne inf fois la 3 me ligne
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [nan nan nan nan inf]
 [nan nan nan nan inf]
 [ 0.  0.  0.  0. -3.]]

```

```
# ON TERMINE
```

```
on enleve la 0 me ligne -inf fois la 3 me ligne
[[ nan nan nan nan -inf]
 [ nan nan nan nan inf]
 [ nan nan nan nan inf]
 [ 0. 0. 0. 0. -3.]]
```

```
on enleve la 1 me ligne nan fois la 2 me ligne
[[ nan nan nan nan -inf]
 [ nan nan nan nan nan]
 [ nan nan nan nan inf]
 [ 0. 0. 0. 0. -3.]]
```

```
on enleve la 0 me ligne nan fois la 2 me ligne
[[nan nan nan nan nan]
 [nan nan nan nan nan]
 [nan nan nan nan inf]
 [ 0. 0. 0. 0. -3.]]
```

```
on enleve la 0 me ligne nan fois la 1 me ligne
[[nan nan nan nan nan]
 [nan nan nan nan nan]
 [nan nan nan nan inf]
 [ 0. 0. 0. 0. -3.]]
[[nan nan inf -3.]]
```

```
<ipython-input-19-620e4523503b>:21: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in double_scalars
c = D[i,j]/D[j,j]
```

```
<ipython-input-2-263c5dffaf1e>:2: RuntimeWarning: invalid value
encountered in multiply
A[i,:] = A[i,:] + x*A[j,:]
```

```
<ipython-input-19-620e4523503b>:29: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in double_scalars
Sol = dilatcolonne(NewB1,s,1./D[s,s])
```

```
Out[25]: array([[ nan,  nan,  nan, -inf]])
```

Donc cela ne marche pas !

On remarque que le dernier pivot de la première double boucle est un 0. Et donc on divise par 0. Il apparaît ensuite le code **nan** qui signifie : not a number ce qui pour Python est une forme polie de dire que c'est une valeur illégale. Puis apparaît aussi des **inf** qui signifie plus clairement des nombres infinis.

Revenons au cas général. Pour minimiser les erreurs d'arrondi et s'affranchir d'une situation de pivot nul, il faut déterminer le plus grand pivot possible en valeur absolue sur la partie de colonne considérée puis permuter les lignes. C'est la recherche partielle du pivot. Pour commencer donnons une procédure qui donne l'indice du plus grand élément d'une liste en valeur absolue.

```
In [1]: def indice_max_abs(L):
...:     """prend en argument une liste ou un tableau et renvoie
...:         indice de plus grand element de L en valeur absolue"""
...:     maxi = abs(L[0])
...:     index = 0
...:     for i in range(len(L)):
...:         if abs(L[i]) > maxi :
...:             maxi = abs(L[i])
...:             index = i
...:     return index

In [2]: indice_max_abs([-1,2,3,-4,1])
Out[2]:
3
```

Nous allons donc créer la fonction Python nommée **NEW_systLin** qui correspondra à la fonction **systLin** mais en y ajoutant la recherche du pivot le plus grand en valeur absolue sur chaque colonne dans la descente vers un système triangulaire.

Nous allons donc utiliser **indice_max_abs** mais uniquement sur la première double boucle, après **for j in range(n-1) :**, on y ajoute la commande

```
index = indice_max_abs(D[j:n,j])+j
```

qui cherchera donc le plus grand coefficient de **D** en valeur absolue de la ligne L_j à la ligne L_{n-1} sur la colonne C_j .

Comme **D[j:n,j]** est une liste, son indexation interne commence à 0 et donc quand on a trouvé l'indice du plus grand élément en valeur absolue de **D[j:n,j]**, on doit lui rajouter **j** pour revenir à l'indexation des lignes de **D**.

Puis on récupère cet indice en le nommant **index**. Puis on permute L_j et L_{index} de **D**

```

In [41]: def NEW_systLin(A,B) :
          # on fait des copies de A et de B
          A1 = np.copy(A); B1 = np.copy(B)
          # on concatene ensemble A1 et B1 dans D
          D = np.concatenate((A1,B1),axis=1)
          n = np.size(A1,0); print(D)
          # On transforme D en une matrice triang sup
          print("On transforme en systeme triang sup :")
          for j in range(n-1) :
              print("On passe a la colonne C",j)
              index = indice_max_abs(D[j:n,j]) + j
              print("indice ligne du coeff le plus grand:",index)
              D = permutligne(D,j,index); print(D)
              for i in range(j+1,n) :
                  print('le pivot est :',D[j,j])
                  c = D[i,j]/D[j,j]
                  print('on enleve a la',i,'eme ligne',c,'fois la',j
                        , 'eme ligne')
                  D = transvecligne(D,i,j,-c)
                  print(D)
          # on transforme D (sauf derniere col) en matrice diag
          print("On transforme en systeme diagonal :")
          for j in range(n-1,0,-1) :
              for i in range(j-1,-1,-1) :
                  c = D[i,j]/D[j,j]
                  print('on enleve a la',i,'eme ligne',c,'fois la',j
                        , 'eme ligne')
                  D = transvecligne(D,i,j,-c)
                  print(D)
          # On transforme la derniere colonne de D en matrice ligne
          NewB1 = np.array([D[:,n]]) ; print(NewB1)
          # On divise les lignes de NewB1 par les pivots successifs
          for s in range(n):
              Sol = dilatcolonne(NewB1,s,1./D[s,s])
          # On retourne alors les solutions du systeme
          return Sol

```

Exemple 08 bis. Testons `NEW_systLin` sur le système de l'exemple 08.

$$\begin{cases} x - y & = 1 \\ -2x + 4y + z & = 4 \\ 3y - 5z & = 0 \end{cases} .$$

```

In [40]: A = np.array([[1., -1., 0.], [-2., 4., 1.], [0., 3., -5.]])
In [41]: B = np.array([[1.], [4.], [0.]])
In [42]: NEW_systLin(A,B)
[[ 1. -1.  0.  1.]
 [-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]
On transforme en systeme triang sup :
On passe a la colonne C 0
indice ligne du coeff le plus grand: 1
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 1. -1.  0.  1.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]
le pivot est : -2.0
on enleve a la 1 eme ligne -0.5 fois la 0 eme ligne
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  1.  0.5  3.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]
le pivot est : -2.0
on enleve a la 2 eme ligne -0.0 fois la 0 eme ligne
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  1.  0.5  3.]
 [ 0.  3. -5.  0.]]
On passe a la colonne C 1
indice ligne du coeff le plus grand: 2
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  3. -5.  0.]
 [ 0.  1.  0.5  3.]]
le pivot est : 3.0
on enleve a la 2 eme ligne 0.3333333333333333 fois la 1 eme ligne
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  3. -5.  0.]
 [ 0.  0.  2.16666667  3.]]
On transforme en systeme diagonal :
on enleve a la 1 eme ligne -2.307692307692308 fois la 2 eme ligne
[[-2.  4.  1.  4.]
 [ 0.  3.  0.  6.92307692]
 [ 0.  0.  2.16666667  3.]]
on enleve a la 0 eme ligne 0.46153846153846156 fois la 2 eme ligne
[[-2.  4.  0.  2.61538462]
 [ 0.  3.  0.  6.92307692]
 [ 0.  0.  2.16666667  3.]]
on enleve a la 0 eme ligne 1.3333333333333333 fois la 1 eme ligne
[[-2.  0.  0. -6.61538462]
 [ 0.  3.  0.  6.92307692]
 [ 0.  0.  2.16666667  3.]]
[[-6.61538462  6.92307692  3.  ]]
Out[42]: array([[3.30769231, 2.30769231, 1.38461538]])

```

Exemple 09 bis. Testons `NEW_systLin` sur le système de l'exemple 09.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 5t = 1 \\ x - 4y - 2z + 6t = -2 \\ 3x + y - 2z + t = 3 \\ -2x + y - 4z + 3t = 2 \end{cases}$$

```
In [47]: A = np.array
         ([[1., 3., 2., -5.], [1., -4., -2., 6.], [3., 1., -2., 1.], [-2., 1., -4., 3.]])
In [48]: B = np.array ([[1.], [-2.], [3.], [2.]])

In [44]: NEW_systLin(A,B)
[[ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [ 1. -4. -2.  6. -2.]
 [ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]
On transforme en systeme triang sup :
On passe a la colonne C 0
indice ligne du coeff le plus grand: 2
[[ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [ 1. -4. -2.  6. -2.]
 [ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]
le pivot est : 3.0
on enleve a la 1 eme ligne 0.3333333333333333 fois la 0 eme ligne
[[ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [ 0. -4.33333333 -1.33333333  5.66666667 -3.]
 [ 1.  3.  2. -5.  1.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]

le pivot est : 3.0
on enleve a la 2 eme ligne 0.3333333333333333 fois la 0 eme ligne
[[ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [ 0. -4.33333333 -1.33333333  5.66666667 -3.]
 [ 0.  2.66666667  2.66666667 -5.33333333  0.]
 [-2.  1. -4.  3.  2.]]

le pivot est : 3.0
on enleve a la 3 eme ligne -0.6666666666666666 fois la 0 eme ligne
[[ 3.  1. -2.  1.  3.]
 [ 0. -4.33333333 -1.33333333  5.66666667 -3.]
 [ 0.  2.66666667  2.66666667 -5.33333333  0.]
 [ 0.  1.66666667 -5.33333333  3.66666667  4.]]
```

ON CONTINUE

On passe a la colonne C 1

indice ligne du coeff le plus grand: 1

```
[[ 3.          1.         -2.          1.          3.          ]
 [ 0.         -4.33333333 -1.33333333  5.66666667 -3.          ]
 [ 0.          2.66666667  2.66666667 -5.33333333  0.          ]
 [ 0.          1.66666667 -5.33333333  3.66666667  4.          ]]
```

le pivot est : -4.333333333333333

on enleve a la 2 eme ligne -0.6153846153846154 fois la 1 eme ligne

```
[[ 3.          1.         -2.          1.          3.          ]
 [ 0.         -4.33333333 -1.33333333  5.66666667 -3.          ]
 [ 0.          0.          1.84615385 -1.84615385 -1.84615385]
 [ 0.          1.66666667 -5.33333333  3.66666667  4.          ]]
```

le pivot est : -4.333333333333333

on enleve a la 3 eme ligne -0.3846153846153846 fois la 1 eme ligne

```
[[ 3.00000000e+00  1.00000000e+00 -2.00000000e+00  1.00000000e+00
 3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -4.33333333e+00 -1.33333333e+00  5.66666667e+00
 -3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.84615385e+00 -1.84615385e+00
 -1.84615385e+00]
 [ 0.00000000e+00  2.22044605e-16 -5.84615385e+00  5.84615385e+00
 2.84615385e+00]]
```

On passe a la colonne C 2

indice ligne du coeff le plus grand: 3

```
[[ 3.00000000e+00  1.00000000e+00 -2.00000000e+00  1.00000000e+00
 3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -4.33333333e+00 -1.33333333e+00  5.66666667e+00
 -3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  2.22044605e-16 -5.84615385e+00  5.84615385e+00
 2.84615385e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.84615385e+00 -1.84615385e+00
 -1.84615385e+00]]
```

le pivot est : -5.846153846153846

on enleve a la 3 eme ligne -0.3157894736842105 fois la 2 eme ligne

```
[[ 3.00000000e+00  1.00000000e+00 -2.00000000e+00  1.00000000e+00
  3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -4.33333333e+00 -1.33333333e+00  5.66666667e+00
 -3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  2.22044605e-16 -5.84615385e+00  5.84615385e+00
 2.84615385e+00]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]
```

On transforme en systeme diagonal :

on enleve a la 2 eme ligne 8776245427696351.0 fois la 3 eme ligne

```
[[ 3.00000000e+00  1.00000000e+00 -2.00000000e+00  1.00000000e+00
  3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -4.33333333e+00 -1.33333333e+00  5.66666667e+00
 -3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
 8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]
```

on enleve a la 1 eme ligne 8506799296144271.0 fois la 3 eme ligne

```
[[ 3.00000000e+00  1.00000000e+00 -2.00000000e+00  1.00000000e+00
  3.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -4.92982456e+00  5.55555556e-01  0.00000000e+00
 8.05907302e+15]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
 8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]
```

on enleve a la 0 eme ligne 1501199875790165.2 fois la 3 eme ligne

```
[[ 3.00000000e+00  8.94736842e-01 -1.66666667e+00  0.00000000e+00
 1.42218936e+15]
 [ 0.00000000e+00 -4.92982456e+00  5.55555556e-01  0.00000000e+00
 8.05907302e+15]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
 8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]
```

```

on enleve a la 1 eme ligne -0.14254385964912283 fois la 2 eme ligne
[[ 3.00000000e+00  8.94736842e-01 -1.66666667e+00  0.00000000e+00
  1.42218936e+15]
 [ 0.00000000e+00 -5.01754386e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  9.24423081e+15]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
  8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]

on enleve a la 0 eme ligne 0.4276315789473685 fois la 2 eme ligne
[[ 3.00000000e+00  1.15789474e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
 -2.13328403e+15]
 [ 0.00000000e+00 -5.01754386e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  9.24423081e+15]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
  8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]

on enleve a la 0 eme ligne -0.2307692307692308 fois la 1 eme ligne
[[ 3.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  1.25000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -5.01754386e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
  9.24423081e+15]
 [ 0.00000000e+00 -6.15384615e-01 -3.89743590e+00  0.00000000e+00
  8.31433777e+15]
 [ 0.00000000e+00  7.01193489e-17 -2.22044605e-16  6.66133815e-16
 -9.47368421e-01]]
[[ 1.25000000e+00  9.24423081e+15  8.31433777e+15 -9.47368421e-01]]

Out [44]:
array ([[ 4.16666667e-01, -1.84238167e+15, -2.13328403e+15,
 -1.42218936e+15]])

```

On peut interpréter ces solutions très grandes. En effet si l'on tape `alg.det(A)`, on obtient `2.6850316841703656e-14` qui est très proche de 0 et donc le système est quasi non inversible.

Chapitre **11**

Approximate integration

■ Objectifs

Les incontournables :
savoir

Cours

■ Introduction

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ et on cherche à calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$, notée $I(f)$, en remplaçant $f(x)$ par des expressions simples à intégrer. Si l'on choisit une constante à la place de f , on aboutit à la formule des rectangles, si l'on choisit un polynôme de degré 1 de la forme $\alpha x + \beta$, on a la formule des trapèzes et si l'on choisit un polynôme de degré 2 du type $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, on aboutit à la formule de Simpson etc. Nous nous cantonnons à la formule des rectangles et à la formule des trapèzes.

■ Formule du point milieu. Extension à la formule des rectangles

L'idée est de considérer le point $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et on approche la fonction f sur $[a, b]$ par la fonction constante $x \mapsto f(x_0)$. Alors : $\int_a^b f(x) dx \approx I(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Améliorons la précision en subdivisant $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ égaux. On a : $a_j = a + jh$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. Ainsi $a_0 = a$ et $a_n = b$. Utilisons la relation de Michel de Chasles pour les intégrales.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx.$$

Et on applique la formule du point milieu aux n intégrales $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx$ séparément.

$$\int_a^b f(x) dx \approx I(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + (2j+1)\frac{h}{2}\right).$$

C'est la formule dite des **rectangles appliquée aux points milieux des sous-intervalles**.

Proposition : Si f admet une dérivée seconde continue sur $[a, b]$ alors si $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2.$$

Exercice 01

Calculer à la main une valeur approchée $I(f)$ de $\int_1^2 \ln x dx$ par la formule des rectangles à partir du point milieu de chaque sous-intervalle avec $n = 3$. Calculer l'erreur de quadrature donnée par la proposition précédente. Déterminer la valeur exacte et comparer à $I(f)$.

Passons à l'algorithme qui illustre la formule des rectangles.

Les arguments sont f la fonction, a et b , les bornes de l'intégrale et n qui fournit le nombre de sous-intervalles pour la méthode.

Donnons deux versions.

```
# UTILISATION POINT MOYEN DES SOUS-INTERVALLES

Donnees : fonction f, bornes flottants a et b, entier n
h ← (b-a)/n
z ← 0
Pour j de 0 → n-1 faire :
    z ← z + f(a+(2*j+1)*(h/2))
on retourne h*z
```

```
# UTILISATION BORD GAUCHE DES SOUS-INTERVALLES

Donnees : fonction f, bornes flottants a et b, entier n
h ← (b-a)/n
z ← 0
Pour j de 0 → n-1 faire :
    z ← z + f(a+ j*h)
on retourne h*z
```

Remarque : La formule des rectangles avec utilisation du point moyen de chaque sous-intervalle est dans les faits plus performante que l'utilisation de l'extrémité du bord gauche de chaque sous-intervalle (ou de chaque bord droit). Nous le verrons sur un exemple en TP.

■ Formule du trapèze. Extension à la formule des trapèzes

L'idée ici est de remplacer f sur $[a, b]$ par une droite $y = \alpha x + \beta$ qui passe par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

L'aire entre la courbe et les droites $x = a$ et $x = b$ est remplacée par l'aire du trapèze formé entre le segment AB , l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$. Calculons cette aire.

Méthode 1

Supposons $f(b) < f(a)$. On remarque que l'aire du trapèze est l'aire du rectangle $(b-a)f(b)$ ajouté à l'aire du triangle $\frac{1}{2}(b-a)(f(a) - f(b))$. On a alors :

$$I(f) = (b-a)f(b) + \frac{1}{2}(f(a) - f(b))(b-a) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)).$$

Méthode 2

Commençons par trouver une équation de la droite qui donne le segment AB . Le calcul est à développer.

$$\begin{cases} f(b) = \alpha b + \beta \\ f(a) = \alpha a + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \beta = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{cases}$$

Puis $I(f) = \int_a^b (\alpha x + \beta) dx = \alpha \frac{b^2 - a^2}{2} + \beta(b - a) = \frac{(b - a)}{2} (\alpha(b + a) + 2\beta)$. Et :

$$\alpha(b + a) + 2\beta = \frac{(f(b) - f(a))(b + a)}{b - a} + \frac{2bf(a) - 2af(b)}{b - a} = \frac{(f(b) - f(a))(b - a)}{b - a} = f(b) - f(a).$$

Ainsi : $\int_a^b f(x) dx \approx I(f) = \frac{(b - a)}{2} (f(a) + f(b))$. C'est la formule du **trapèze**.

Améliorons la précision en subdivisant $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ égaux. On a : $a_j = a + jh$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $h = \frac{b - a}{n}$. Ainsi $a_0 = a$ et $a_n = b$. Utilisons encore la relation de Michel de Chasles pour les intégrales.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx.$$

Et on applique la formule du trapèze aux n intégrales $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx$ séparément.

$$\int_a^b f(x) dx \approx I(f) = \frac{b - a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(a_j) + f(a_{j+1})) = \frac{b - a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(a + jh) + f(a + (j + 1)h)).$$

C'est la formule dite des **trapèzes**. On a mis trapèze au pluriel car il y a n trapèzes ici.

Proposition : Si f admet une dérivée seconde continue sur $[a, b]$ alors si $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(f) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12n^2} M_2.$$

Exercice 02

Calculer à la main une valeur approchée $I(f)$ de $\int_1^2 \ln x dx$ par la formule des trapèzes avec $n = 3$. Calculer l'erreur de quadrature donnée par la proposition précédente. Déterminer la valeur exacte et comparer à $I(f)$.

Passons à l'algorithme correspondant qui a pour arguments **f** la fonction, **a** et **b** les bornes et **n** le nombre de sous-intervalles.

```
Donnees : fonction f, bornes flottants a et b, entier n
h ← (b-a)/float(n)
z ← 0
Pour j variant de 0 → n-1 faire :
    z ← z+f(a+j*h)+f(a+(j+1)*h)
On retourne z*h/2
```

■ Fonctions prédéfinies de Python pour le calcul intégral

On peut calculer des *valeurs approchées d'intégrales* en utilisant la fonction **quad** du sous module **scipy.integrate**. Cette fonction renvoie une valeur approchée de l'intégrale ainsi qu'un majorant de l'erreur commise.

Ainsi pour approcher $\int_a^b f(t) dt$, on tape :

```
import scipy.integrate as integr ; integr.quad(f,a,b)
```

Nous verrons tout ça dans la partie TD.

Remarque : Juste pour finir, rappelons que Python sait faire (plus ou moins bien) du calcul formel. Pour le *calcul formel*, on utilise **integrate** de **sympy**

sympy est le diminutif de Symbolic Mathematics in Python

```
In [5]: from sympy import *
In [6]: x = symbols('x')
In [7]: integrate(log(x),(x,1,2))
Out[7]:
-1 + 2log(2)
```

graphicx colortbl pst-tree,pst-node,pstricks
tikz

Chapitre **12**

Pixels and images

■ Objectifs

Les incontournables :
savoir

Cours

■ Notion d'image et de pixel

Nous considérons ici les images numériques matricielles. Ainsi une image peut être représentée par une matrice dans laquelle chaque coefficient est un pixel (picture element), unité minimale adressable par le contrôleur vidéo et supposé de couleur uniforme. Le format de l'image (png, jpeg, etc.) désigne la manière dont cette matrice est représentée en mémoire.

- ☞ Pour une image en noir et blanc, chaque pixel ne peut prendre que deux valeurs, ce qui permet de l'encoder sur un seul bit, un 0 ou un 1 ;
- ☞ pour une image en niveau de gris, chaque teinte de gris (en passant du noir au gris) est encodé sur un octet, ce qui permet de représenter $2^8 = 256$ nuances de gris ;
- ☞ pour une image en couleur, chaque pixel est encodé par trois octets, chaque octet représente une nuance de couleur. Par exemple, dans le cas du format RGB (Red, Green, Blue), le premier octet dose une quantité de rouge, le second la quantité de vert et le troisième la quantité de bleu pour une synthèse additive. Chaque octet varie donc entre 0 et 255. Le triplet (255, 0, 0) code le rouge, le triplet (0, 0, 0) code le blanc, le triplet (255, 255, 255) code le noir, le triplet (255, 255, 0) code le jaune, le triplet (120, 120, 120) code un niveau de gris, etc. ;
- ☞ Enfin, les pixels d'une image en couleur peuvent être encodés par quatre octets au format RGBA (A pour alpha), le quatrième octet codant la transparence du pixel.

Une image est définie par son nombre de pixel. Par exemple, une image contenant 1600 pixels en largeur et 1200 pixels en hauteur a une définition de 1600×1200 pixels soit 1920000 pixels (près de deux mégapixels). La résolution est exprimée en points ou pixels par pouce (ppp) ou dot per inch en anglais (dpi) Un pouce vaut 2.54 cm . Ainsi une résolution de 72 ppp en largeur et en hauteur signifie qu'un carré de côté 2.54 cm contient $72 \times 72 = 5184$ pixels.

Une image de longueur 1600 pixels et de résolution 300 ppp, qui est une résolution correcte pour une impression, a une longueur de $1600/300 = 5.33$ pouces soit 13.55 cm .

```
# Donnons trois exemples
In [1]: import numpy as np
In [2]: import matplotlib.pyplot as plt
In [3]: import imageio as io

In [5]: image02 = io.imread('D:/Documents/Test_image_02.jpeg')
In [6]: image04 = io.imread('D:/Documents/Test_image_04.jpeg')
In [7]: image05 = io.imread('D:/Documents/Test_image_05.jpeg')
In [8]: plt.imshow(image02)
Out[8]: <matplotlib.image.AxesImage at 0x27f6f751ee0>
In [9]: plt.imshow(image04)
Out[9]: <matplotlib.image.AxesImage at 0x27f6f7e8be0>
In [10]: plt.imshow(image05)
Out[10]: <matplotlib.image.AxesImage at 0x27f0002c0d0>
```

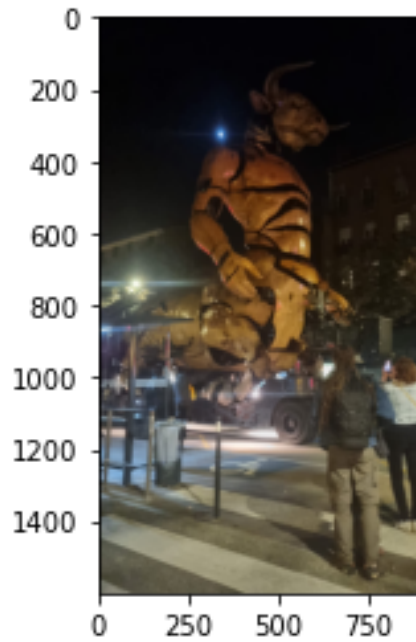


Figure 02 : Minotaure dans les rues de Toulouse

Le code `image.shape` renvoie les dimensions du tableau qui représente `image`. Pour une image en couleur, `image.shape` renvoie `(n,p,3)` où `n` est le nombre de lignes, `p` est le nombre de colonnes et le `3` signifie qu'il y a trois octets par pixel c'est-à-dire par coefficient du tableau.

```
In [12]: image02=np.array(image02)
In [13]: image02
Out[13]:
array([[ [ 3, 3, 5], [ 3, 3, 5], [ 3, 3, 5],
        ...,
        [ 3, 2, 7], [ 3, 2, 7], [ 3, 2, 7]],
       [[ 3, 3, 5],[ 3, 3, 5], [ 3, 3, 5],
        ...,
        [ 3, 2, 7], [ 3, 2, 7], [ 3, 2, 7]],
       [[ 3, 3, 5], [ 3, 3, 5], [ 3, 3, 5],
        ...,
        [ 3, 2, 7], [ 3, 2, 7],[ 3, 2, 7]],
       ...,
       [[106, 108, 95],[107, 109, 96], [109, 111, 98],
        ...,
        [ 86, 78, 57],[ 87, 79, 58],[ 88, 80, 59]]], dtype=uint8)
```

Le code `dtype=uint8` signifie que les éléments des 3-listes sont des entiers non signés représentés par 8 bits.

```

In [11]: image02.shape
Out[11]: (1600, 900, 3)
# le tableau qui represente image02 a 1600 lignes
# et a 900 colonnes.
# Chaque coefficient qui est une 3-liste faisant 3 octets,
# calculons la definition de image02
In [12]: 1600*900*3
Out[12]: 4320000
In [13]: 4320000/1000000
Out[13]: 4.32
# et en nombre de bit :
In [14]: 4320000*8
Out[14]: 34560000

```

L'image02 fait donc 4.32 Megaoctets.



Figure 04 : Paresseux au jardin du musée d'histoire naturelle

```

In [13]: image04.shape
Out[13]: (4032, 3024, 3)
In [14]: 4032*3024*3
Out[14]: 36578304
In [15]: 36578304/10**6
Out[15]: 36.578304
# L'image fait 36.58 Megaoctets.

```



Figure 05 : Tiki à Ua Pou

```
In [14]: image05.shape
Out[14]: (1024, 768, 3)
In [16]: 1024*768*3
Out[16]: 2359296
In [17]: 2359296/10**6
Out[17]: 2.359296
# L'image n'a que 2.36 Megaoctets
```

■ Transformation d'une image

La modification d'une image consiste à modifier la matrice de pixels. En général, cela s'effectue avec deux boucles imbriquées qui permettent d'avoir accès à chaque pixel. La complexité en temps est alors $n \times p$ si n est le nombre de lignes et p le nombre de colonnes et dans la boucle intérieure, les diverses opérations se répètent trois fois pour des pixels d'une image en couleur. La complexité est un $O(np)$.

Nous allons partir d'une image source et lui appliquer les opérations de transformation type. En TP, vous pourrez taper les codes qui permettront de réaliser ces opérations.

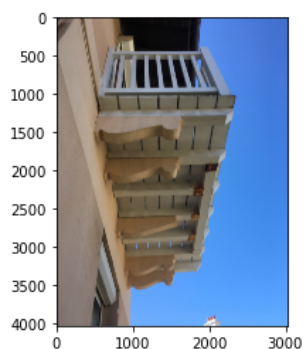


image starter

1. Symétrie d'une image. L'idée est de retourner une image issue de l'image de départ par symétrie autour d'un axe central passant par le milieu de l'image. Si p est le nombre de colonnes de la matrice de pixels représentant l'image starter, on fait la permutation des colonnes C_1 et C_p , des colonnes C_2 et C_{p-1} , des colonnes C_3 et C_{p-2} etc.

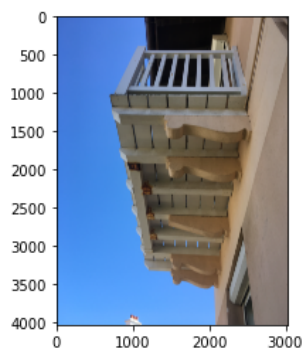


image symétrique

2. Rotation d'une image. On effectue une rotation d'un angle de $\pi/2$ autour du centre de l'image. Au niveau de la matrice de pixels, pour obtenir la matrice de la nouvelle image, les lignes L_1, \dots, L_n de la matrice de l'image starter deviennent les colonnes C_1, \dots, C_n de la matrice de l'image tournée. Ainsi le nombre de lignes et le nombre de colonnes se permutent.

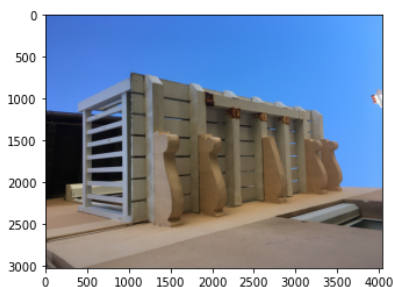


image rotationnée

3. Image en négatif. On remplace l'image starter par l'image dans laquelle chaque composante de couleur de chaque pixel est remplacée par sa valeur complémentaire dans l'intervalle des entiers de 0 à 255. Ainsi si un des coefficients de la matrice starter est $[r, g, b]$, il devient $[255 - r, 255 - g, 255 - b]$ ainsi le blanc devient le noir et réciproquement d'où le terme de négatif.

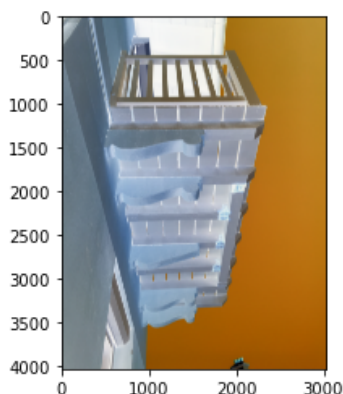


image négatif

On remarque en passant que le négatif du bleu ciel est une sorte de jaune.

4. Conversion d'une image couleur en niveau de gris. Une image couleur est donc une matrice dont les coefficients sont des 3-listes $[r, g, b]$ doit être remplacé par des coefficients à une seule composante y entier entre 0 et à 255 donc un octet. Cette quantité appelée **luminance** traduit la sensation virtuelle de luminosité, dépend de manière inégale des trois composantes RGB. La formule communément recommandée pour cette conversion est

$$y = np.round(0.2126r + 0.7152g + 0.0722b)$$

La fonction `np.round` renvoie l'entier le plus proche car il ne faut pas oublier que y doit être entier. Par ailleurs si r, g et b sont dans $[0, 255]$, $y \in [0, 255]$ car $0.2126 + 0.7152 + 0.0722 = 1$. Par ailleurs, pour un oeil humain, le vert paraît plus lumineux que le rouge, lui-même plus lumineux que le bleu, d'où les poids différents des coefficients devant r, g et b .

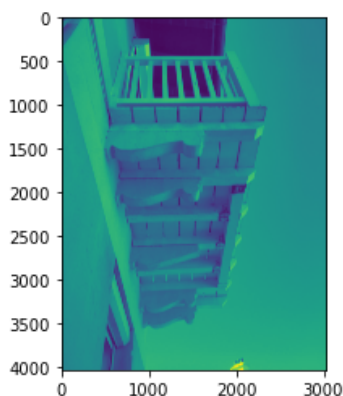


image en niveau de gris

5. Convolution par un masque d'une image. L'idée est d'obtenir par exemple le lissage d'une image, une augmentation du contraste, ou créer un effet de relief. On part d'une image donc une matrice M constituée de pixels $M_{i,j}$ et on la remplace par le produit de convolution de M par une matrice $C = (c_{i,j})$ carrée d'ordre 3. On obtient une matrice M^* de même taille que M et chacun de ces coefficients $m_{i,j}^*$ vaut :

$$c_{0,0}m_{i-1,j-1} + c_{0,1}m_{i-1,j} + c_{0,2}m_{i-1,j+1} + c_{1,0}m_{i,j-1} + c_{1,1}m_{i,j} + c_{1,2}m_{i,j+1} + c_{2,0}m_{i+1,j-1} + c_{2,1}m_{i+1,j} + c_{2,2}m_{i+1,j+1}$$

On remarque que si l'on considère le tableau $T_{i,j}$ constitué de $m_{i,j}$ et de ses huit voisins les plus proches, $m_{i,j}^*$ se construit en faisant la somme des 9 produits des éléments du tableau $T_{i,j}$ et des coefficients de C correspondants au même indice.

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j} & m_{i-1,j+1} \\ m_{i,j-1} & m_{i,j} & m_{i,j+1} \\ m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j} & m_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Remarques

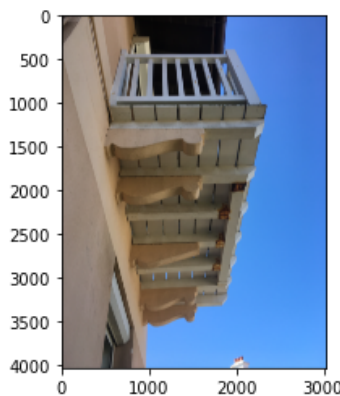
☞ Attention, dans le cas d'une image en niveau de gris, $m_{i,j}$ est un entier mais dans le cas d'une image en couleur, $m_{i,j}$ est une 3-liste. Par contre $c_{i,j}$ est toujours un entier ou un flottant. Ainsi $m_{i,j}^*$ est un entier ou une 3-liste et la matrice M^* reste du même type que M (matrice d'image en niveau de gris ou matrice d'image en couleur). Pour bien obtenir des entiers, on pourra utiliser encore `np.round` si les coefficients de C ne sont pas des entiers. De plus, l'entier $m_{i,j}^*$ ou les entiers qui composent la 3-liste $m_{i,j}^*$ doivent être entre 0 et 255. Si ce n'est pas le cas, on remplacera les résultats négatifs par 0 et les résultats supérieurs à 255 par 255. Ainsi, par exemple si le calcul donne pour $m_{i,j}^* = [281, -15, 120]$, on posera $m_{i,j}^* = [255, 0, 120]$.

☞ Lorsque le pixel initial $m_{i,j}$ est sur un bord, il n'a pas 8 voisins mais 5 et pour simplifier on pose $m_{i,j}^* = m_{i,j}$ pour ces pixels. On a un effet de bord mais imperceptible pour l'oeil.

Exemple 01 : filtre moyenneur pour obtenir un effet de lissage

On utilise pour matrice $C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour ce filtre, $m_{i,j}^*$ est donc

$$\frac{1}{9} (m_{i-1,j-1} + m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + m_{i,j-1} + m_{i,j} + m_{i,j+1} + m_{i+1,j-1} + m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1})$$



Cette image reste proche de l'image starter.

Exemple 02 : Augmentation du contraste

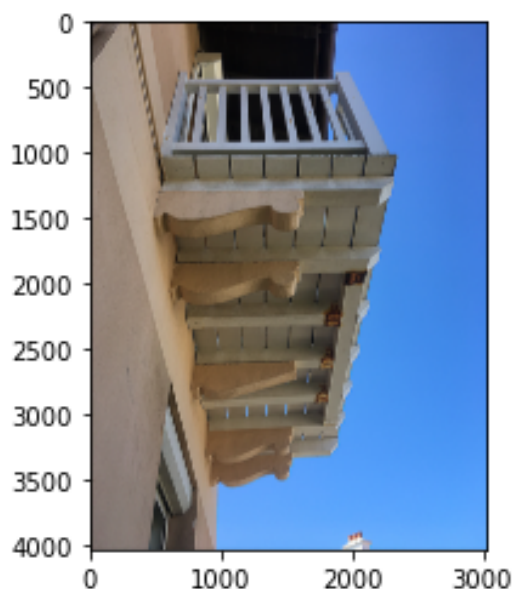
On utilise pour matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour ce filtre, $m_{i,j}^*$ est donc

$$-m_{i-1,j} - m_{i,j-1} + 5m_{i,j} - m_{i,j+1} - m_{i+1,j}$$

Exemple 03 : Repoussage pour obtenir un effet de relief

On utilise pour matrice $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour ce filtre, $m_{i,j}^*$ est donc

$$-2m_{i-1,j-1} - m_{i-1,j} - m_{i,j-1} + m_{i,j} + m_{i,j+1} + m_{i+1,j} + 2m_{i+1,j+1}$$



Repoussage

L'image de sortie est légèrement différente de l'image starter mais reste encore proche. Faisons maintenant une transformation plus nette.

Exemple 04 : Traitement personnel

On utilise pour matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. Pour ce filtre, $m_{i,j}^*$ est donc

$$m_{i-1,j-1} + m_{i,j} + m_{i+1,j+1}$$


```

# La matrice devient :

In [19]: Traitement_Perso(im)
Out[19]:
array([[ [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], ...,
         [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0]],
       [ [ 0, 0, 0], [188, 156, 146], [187, 155, 147], ...,
         [199, 255, 255], [196, 255, 255], [ 0, 0, 0]], ...,
       [ [ 0, 0, 0], [196, 168, 156], [194, 165, 156], ...,
         [192, 255, 255], [192, 255, 255], [ 0, 0, 0]], ...,
       [ [ 0, 0, 0], [255, 255, 255], [255, 255, 255], ...,
         [255, 255, 255], [255, 255, 255], [ 0, 0, 0]],
       [ [ 0, 0, 0], [255, 255, 255], [255, 255, 255], ...,
         [255, 255, 255], [255, 255, 255], [ 0, 0, 0]],
       [ [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], ...,
         [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0]]],
      dtype=uint8)

```

On se rend compte que les pixels majoritaires sont de valeurs importantes proches du blanc. On doit donc obtenir une image plutôt claire. Ce sera le cas. Voici l'image transformée par `Traitement_Perso`

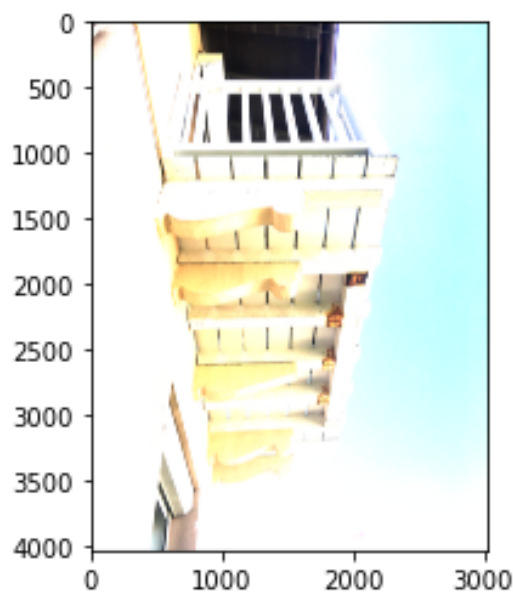


Image traitée par le traitement perso

6. Detection de contours. On détecte les contours en repérant les pixels qui correspondent à un changement brutal d'intensité lumineuse. Pour réaliser ceci, nous partons d'une image en niveau de gris. Notons alors les coordonnées de chaque pixel (x, y) , où x et y sont des entiers dans la matrice représentant cette image et notons $I(x, y)$ la luminance de ce pixel. Définissons le gradient de $I(x, y)$:

$$\nabla I(x, y) = \frac{\partial I}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial I}{\partial y} \vec{e}_y.$$

On verra en deuxième année que $\frac{\partial I}{\partial x}$ désigne la dérivée de I par rapport à x (avec y fixé) et $\frac{\partial I}{\partial y}$ désigne la dérivée de I par rapport à y (avec x fixé). De plus ce vecteur gradient est dans la direction de plus forte variation du clair vers le sombre et son module $\|\nabla I(x, y)\|$ est l'intensité de la variation. Ainsi, on peut penser que les contours correspondent aux pixels pour lesquels $\|\nabla I(x, y)\|^2$ est important. On conviendra de colorer en blanc (luminance = 255) les pixels pour lesquels cette quantité est inférieure à un certain seuil et en noir (luminance = 0) les autres.

Par ailleurs, comme (x, y) est dans la pratique un couple d'entiers (i, j) , il faut considérer un gradient discret. La justification mathématique de ce qui va suivre est hors programme même en TSI2. On va admettre que pour calculer ce gradient discret, on utilisera un masque C_1 pour le calcul de $\frac{\partial I}{\partial x}$ et un masque C_2 pour le calcul de $\frac{\partial I}{\partial y}$.

Sobel a démontré qu'il fallait utiliser

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (filtre de Sobel),}$$

ce qui donnera une approximation du gradient discret la plus indépendante possible au bruit de l'image.

C'est quoi le bruit d'une image? On peut définir le bruit comme un signal parasite qui détériore la qualité de transmission d'une information, plus vous avez de bruit et plus la qualité de la photo sera mauvaise et inversement. Visuellement, c'est un grain qui dégrade le rendu des clichés et cache les détails. Concrètement, votre photographie numérique est composée de pixels comme vous le savez et plus il y a de bruit et plus leurs valeurs s'éloignent de ce qu'elles devraient être. Donc les filtres de Sobel permettent d'avoir des approximations des normes de vecteur gradient proches des valeurs exactes.

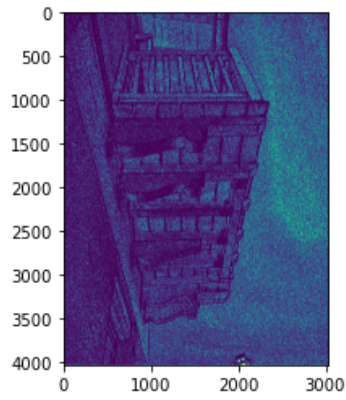
Revenons à nos calculs. Donc $\frac{\partial I(i, j)}{\partial x}$ vaut $\sum_{u=0}^2 \sum_{v=0}^2 C_1(u, v) I(i-1+u, j-1+v)$.

Et $\frac{\partial I(i, j)}{\partial y}$ vaut $\sum_{u=0}^2 \sum_{v=0}^2 C_2(u, v) I(i-1+u, j-1+v)$.

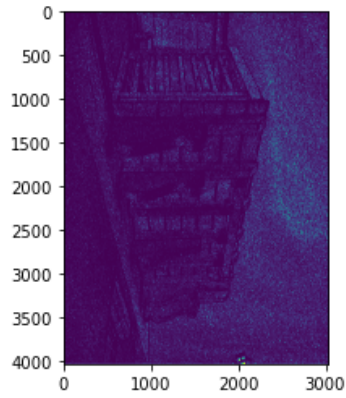
On en déduit la matrice dont chaque coefficient est $\nabla I(i, j)$ puis on calcule alors l'intensité

$$\left(\frac{\partial I(i, j)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial I(i, j)}{\partial y} \right)^2$$

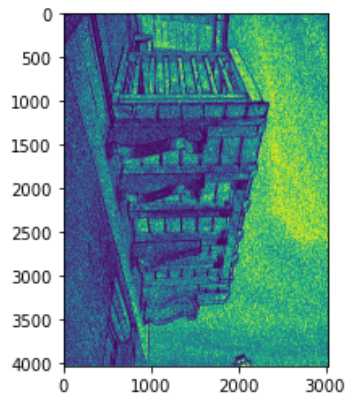
pour tout (i, j) et si cette quantité est inférieure à la valeur de seuil, on met 255 sinon on met 0, on crée une nouvelle matrice de même taille qui correspond à l'image des contours. Donnons quelques exemples avec des seuils différents.



Contour avec seuil de 15



Contour avec seuil de 4



Contour avec seuil de 50

7. Stéganographie. C'est l'art de la dissimulation. Cachons une image au sein d'une autre image. Dans une image, chaque composante de couleur de chaque pixel est représentée par un entier codé sur huit bits :

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Les quatre premiers bits dits de poids forts ont plus d'importance que les quatre bits suivants, dits de poids faibles et l'expérience montre qu'on ne change guère l'image en ne gardant que les quatre bits de poids forts :

a_0	a_1	a_2	a_3	0	0	0	0
-------	-------	-------	-------	---	---	---	---

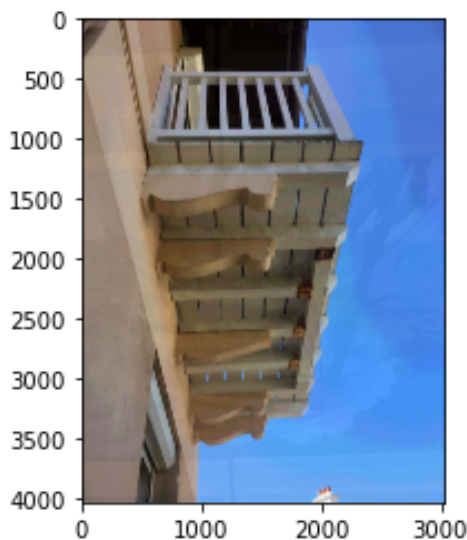
Dès lors, les quatre bits de poids faibles ainsi libérés vont pouvoir nous servir à cacher les quatre bits de poids forts d'une seconde image

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

L'encodage donne

a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	b_3
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Donnons l'image du balcon dans lequel on a dissimulé une autre image. On obtient :



Balcon avec image cachée dedans

Cette image est même à l'oeil nu un peu différente de l'image starter du balcon. Regardez le ciel, il n'est pas très uniforme. On devine quelque chose mais impossible de reconnaître une image.

Le décodage de chaque pixel de l'image précédente donne

b_0	b_1	b_2	b_3	0	0	0	0
-------	-------	-------	-------	---	---	---	---

On obtient donc l'image cachée ou presque (car on n'a que les bits de poids forts de la vraie image cachée, les bits de poids faibles ont été perdus. Ceci dit, on pourrait les stocker dans une nouvelle image et les ajouter à l'image cachée quand elle est décodée mais il faut taper alors un peu plus de code, on ne le fera pas). Et il reste à visualiser.

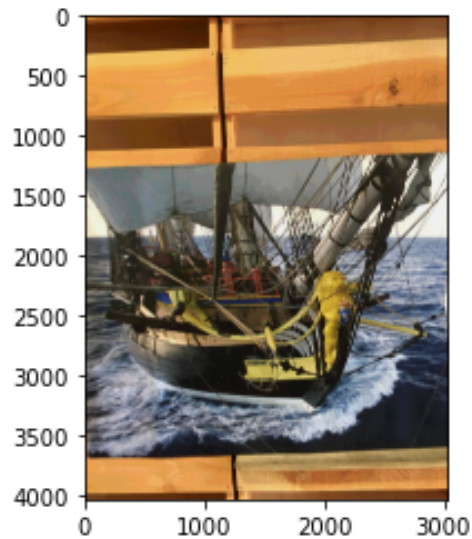


Image cachée dans balcon : C'est l'hermione !

