Concours blanc 2TSI 2025

Modelisation

Solution Q1 à Q20

Q1. On remplace x par 0 et on a bien $g(0) = 45$.

Q2. g est une fonction polynomiale de degré 3 et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, 24[$ et

$$g'(x) = -0.06x^2 + 1.44x - 5.27$$

Q3. On résout $g'(x) = 0$.

C'est une équation du second degré avec $\Delta = (1.44)^2 - 4 \times (-0.06) \times (-5.27) = 0.8088$

Or $0.9 \times 0.9 = 0.81$ et donc $\sqrt{0.8088} \sim 0.9$

$$x_1 = \frac{-1.44 + \sqrt{0.8088}}{-2 \times 0.06} = \frac{-1.44 + 0.9}{-0.12} = \frac{-0.54}{-0.12} = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$x_2 = \frac{-1.44 - \sqrt{0.8088}}{-2 \times 0.06} = \frac{-1.44 - 0.9}{-0.12} = \frac{-2.34}{-0.12} = \frac{234}{12} = 19.5$$

La fonction g est décroissante sur $[0, 4.5]$ et sur $[19.5, 24]$ et croissante sur $[4.5, 19.5]$.

On voit que le graphe 1 est bon jusqu'à 12 heures environ après il descend trop tôt et même remonte après 21 heures.

Q4. Définition : On appelle **polynômes interpolateurs de Lagrange** associés à la famille $(a_0, a_1, ..., a_n)$ les $n + 1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par :

$$L_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Pour $n = 1$ et $a_0 = 3$ et $a_1 = 13$, on a :

$$L_0(X) = \frac{X - a_1}{a_0 - a_1} = \frac{X - 13}{3 - 13} = \frac{1}{10}(13 - X).$$

$$L_1(X) = \frac{X - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{X - 3}{13 - 3} = \frac{1}{10}(X - 3).$$

Q5. L_i est constitué des produits des polynômes $\dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$ du premier degré pour tout j variant de 0 à n avec $j \neq i$. Donc comme il y a n polynômes de dgré 1 dans ce produit, L_i est exactement de degré n.

Q6. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$L_i(a_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} 1 = 1.$$

Par ailleurs pour tout $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $L_i(a_k) = 0$ car dans le produit apparaît le terme $\dfrac{a_k - a_k}{a_i - a_k} = 0$.

Alors pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = k \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq k \end{cases}$

Q7. Il suffit de montrer que la famille est libre car son cardinal est $n + 1$. Posons $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(a_k) = 0 \Rightarrow \alpha_k L_k(a_k) = \alpha_k = 0.$$

Donc $(L_0, ..., L_n)$ est libre.

Q8. Posons $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(a_i)L_i$ alors $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$Q(a_k) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)L_i(a_k) = f(a_k)L_k(a_k) = f(a_k).$$

Supposons qu'il existe deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $Q(a_k) = f(a_k) = Z(a_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $(Q - Z)(a_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $Q - Z$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui admet $n + 1$ racines distinctes et donc $Q - Z = 0$. Il y a unicité.

Q9. On s'inspire de `BASE_LAGRANGE` du TD d'informatique.

```
In [1]: from numpy.polynomial import Polynomial
In [2]:  def LAGRANGE(i,A,x):
   ...:      n = len(A) -1
   ...:      Pol = Polynomial([1])
   ...:          for j in range(0,n+1):
   ...:              if j!=i :
   ...:                  Pol = Pol * Polynomial([-A[j]/(A[i]-A[j]),
                         1/(A[i]-A[j])])
   ...:      return Pol(x)
```

Q10. Montrons que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- **Symétrie**

Pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^1 g(x)f(x)\, dx = \langle g,\, f\rangle$.

- **Bilinéarité**

Pour tout $(f, g, h) \in E^3$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle f,\, g + ah\rangle = \int_0^1 f(x)(g(x) + ah(x))\, dx = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx + a\int_0^1 f(x)h(x)\, dx = \langle f,\, g\rangle + a\langle f,\, h\rangle.$$

- **Définie positive**

Pour tout $f \in E$, $\langle f,\, f\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx \geqslant 0$.

De plus, si $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$, comme $x \mapsto f(x)^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, $x \mapsto f(x)^2$ est nulle donc $x \mapsto f(x)$ est nulle.

Q11. L'inégalité (1) est aussi $\|P - f\|^2 \leqslant \|Q - f\|^2$ ou encore $\langle f - P,\, f - P\rangle \leqslant \langle f - Q,\, f - Q\rangle$.
Par ailleurs, $\langle f - Q,\, f - Q\rangle = \langle f - P - tR,\, f - P - tR\rangle$.
On a bien : $\langle f - P,\, f - P\rangle \leqslant \langle f - P - tR,\, f - P - tR\rangle$

Q12. On développe le membre de droite de la dernière inégalité.

$$\|f - P\|^2 \leqslant \|f - P\|^2 - 2t\langle f - P,\, R\rangle + t^2\|R\|^2.$$

Et on a bien : $0 \leqslant -2t\langle f - P,\, R\rangle + t^2\|R\|^2$.

Q13. La propriété $-2t\langle f - P,\, R\rangle + t^2\|R\|^2 \geqslant 0$ est valable pour tout t.
On a (2) : $t\left(t\|R\|^2 - 2\langle f - P,\, R\rangle\right) \geqslant 0$.
Supposons $t > 0$ alors (2) devient $t\|R\|^2 - 2\langle f - P,\, R\rangle \geqslant 0$.
Si t tend vers 0^+, il reste $-2\langle f - P,\, R\rangle \geqslant 0$ et donc $\langle f - P,\, R\rangle \leqslant 0$.

Q14. Reprenons (2) et supposons $t < 0$. Alors : $t\|R\|^2 - 2\langle f - P,\, R\rangle \leqslant 0$.
On fait tendre t vers 0^- et il reste $-2\langle f - P,\, R\rangle \leqslant 0$ ou encore $\langle f - P,\, R\rangle \geqslant 0$.

Q15. Finalement, en réunissant **Q13** et **Q14**, pour tout $R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle f - P,\, R\rangle = 0$.

Q16. Supposons P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\langle f - P_1,\, R\rangle = \langle f - P_2,\, R\rangle = 0$.
Alors $\langle P_1 - P_2,\, R\rangle = 0$ pour tout $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $P_1 - P_2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à tous les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et ainsi $P_1 - P_2 \in (\mathbb{R}_n[X]) \cap (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$.
Comme les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$ et $(\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$ sont en somme directe dans E espace préhilbertien, $P_1 - P_2 = 0$ et on a bien l'unicité.

Q17. On sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\langle f - P, X^k\rangle = 0$. Et $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) x^k\, dx = 0.$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \int_0^1 f(x) x^k\, dx = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^{j+k}\, dx.$$

Q18. On a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 x^{j+k}\, dx = \frac{1}{j+k+1}$.

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \int_0^1 f(x) x^k\, dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+k+1} a_j.$$

Ainsi en posant our tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 f(x) x^k\, dx = I_k$, on a : $H_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$.

Q19. Comme H_{n+1} est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, H_{n+1} est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q20. Comme 0 n'est pas une valeur propre de H_{n+1}, alors $\mathsf{Det}\, H_{n+1} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, où les réels $\lambda_1, ...\lambda_n$ sont les n valeurs propres de H_{n+1} répétées éventuellement selon leur ordre de multiplicité. Ainsi H_{n+1} est inversible.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (H_{n+1})^{-1} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}.$$