TSI2. Concours Blanc 2025. Mathématiques

Duré 4 heures. Les calculatrices sont interdites

Les deux exercices et les deux problèmes sont indépendants et de poids différents

Exercice 01

Étude d'un lancer dans un panier

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0,1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

Q01. On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T ? On explicitera la loi sans démonstration.

Q02. Pour tout $k \in [\![1, +\infty[\![$, posons R_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer est réussi. »

(a) On remarque que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}\left(\overline{R_k}\right) = q^k$.

Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right)$ et en déduire $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{R_k}\right)$.

(b) Calculer la probabilité de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k$.

Quelle est la probabilité de réussir au moins un panier ?

Exercice 02

Nature d'intégrales généralisées

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_a(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x^a}$.

On note les intégrales généralisées : $I_a = \displaystyle\int_0^1 f_a(t)\,dt$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\,dt$.

Q03. Montrer que I_a converge pour $a < 2$. Qu'en est-il pour $a \geqslant 2$?

Q04. Soit $a > 1$, montrer que J_a est absolument convergente.

Q05. On veut connaître la nature de J_a pour $a \in]0, 1]$.

(a) Soit $X > 1$, montrer : $\displaystyle\int_1^X f_a(t)\,dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}\,dt.$

(b) Conclure.

Q06. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\,dt$ est-elle convergente ?

Problème 01

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \phantom{2u_n -{}} v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Partie I. Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Q07. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et l'écrire sous forme factorisée.

Q08. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.

Q09. La matrice A est-elle inversible ?

Q10. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Partie II. Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$.

Q11. Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q12. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q13. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.

Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q14. Déterminer une relation entre A, P, T P^{-1}.

Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

Q15. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

Q16. Que vaut N^n pour tout entier $n \geqslant 2$?

Q17. Déduire de ce qui précède une expression de T^n. On donnera chacun de ses coefficients.

Q18. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

Q19. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

Q20. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. Démontrer cette relation par récurrence.

Q21. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n.

Problème 02

Partie I : Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par : $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$: $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}$$

Q22. En calculant, de deux façons différentes : $\lim\limits_{x \to x_1} (x - x_1)\, g(x)$, établir que : $a_1 = \dfrac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$, où Q' désigne le polynôme dérivée de Q.

Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

Q23. On suppose désormais que, pour tout réel x : $P(x) = 1$ avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Partie II

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right)$$

Q24. Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

Q25. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.

Q26. Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$: $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)}$.

Q27. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} f(n) x^{2n+1}$.

(a) Déterminer son rayon de convergence R.

(b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$, ainsi que son rayon de convergence.

(c) i. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$, en précisant le rayon de convergence.

ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1 - x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\dfrac{1}{1 - x}$ et $\dfrac{1}{1 + x}$.

(d) Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, en précisant le rayon de convergence, que l'on comparera à la valeur R obtenue en **Q27-a**

(e) Montrer que, pour tout réel x de $]-R, R[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln\left(1-x^2\right)$

(f) Pour tout réel x de $]-R, R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

<u>Indication</u> : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.

(g) Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\right)$

Q28. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geqslant 1$, où f est la fonction définie à la question **Q25**.

(a) Étudier la convergence de la série de terme général $f(n)$, pour $n \geqslant 1$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $H(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = H(n) - 1 + \frac{1}{n+1}$$

puis en utilisant **Q28-b**, montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$