2TSI. Concours blanc Math. 2025

CORRECTION

Exercice 01

Q01. T renvoie le rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc $\boxed{T \sim \mathcal{G}(p)}$.

Q02-a Soit R_k l'événement « le k^{eme} lancer est réussi. »
On remarque que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}\left(\overline{R_k}\right) = q^k$.

Calculons pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right)$

On utilise la formule des probabilités composées.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right).\mathbb{P}_{\overline{R_1}}\left(\overline{R_2}\right).\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}\left(\overline{R_3}\right)\ldots\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}}}\left(\overline{R_n}\right).$$

On obtient $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right) = q \times q^2 \times \ldots \times q^n = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{R_k}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $q \in]0, 1[$ fixé.

Q02-b On veut calculer la probabilité de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k$. On remarque que c'est aussi la probabilité de réussir au moins un panier. On va user des lois de Morgan.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{R_k}\right) = 1 - 0 = 1.$$

$\boxed{\text{L'événement « réussir au moins un panier » est quasi-certain.}}$

Problème 01

On considère les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$, $(v_n)_{n \geqslant 0}$ et $(w_n)_{n \geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \phantom{2u_n -{}} v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout} \quad n \geqslant 0, \ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Q07. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
Montrons que le polynôme caractéristique χ_A de A a pour expression : $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$.

$$\chi_A(x) = \text{Det}(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\left((x-1)^2 - 1\right) + \underbrace{(-1 + x - 1)}_{(x-2)} = (x-2)(x-1)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, donc 1 et 2.

Q08. Le polynôme caractéristique de A est scindé, la matrice A est donc trigonalisable.

Q09. 0 n'est pas valeur propre de A donc la matrice A est inversible. (En effet $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ puisque 0 n'est pas valeur propre)

Q10. La matrice A est-elle diagonalisable ?

☞ On détermine l'espace propre E_1 associé à 1 puisque son ordre de multiplicité est 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathsf{Ker}\,(A - I_3)$, alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ z \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

☞ Donc $E_1 = \mathsf{Vect}\,(b_2)$ où $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\dim(E_1) = 1 < 2$ (2 étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1) donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Q11. On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.
Montrons que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Det}(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times 1 = -1 \neq 0$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est une base puisque le déterminant précédent est non nul (La famille est libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ c'est donc une base)

Q12. Montrons que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(b_1) = 2b_1$.

☞ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(b_2) = b_2$.

☞ Et enfin :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(b_3) = b_2 + b_3$.

☞ Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes étant les coordonnées de $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Q13. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.
Déterminer P et vérifions que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ Les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs de $\mathscr{B}$ exprimés dans la base canonique.
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☞ Un calcul immédiat permet d'obtenir que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q14. Déterminons une relation entre A, P, T P^{-1}.
☞ Avec la formule $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$, on a $A = PTP^{-1}$.

Q15. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons D et vérifions que N et D commutent.

☞ $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ $DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$.

Donc D et N commutent.

Q16. Que vaut N^n pour tout entier $n \geqslant 2$?

☞ $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ la matrice nulle.

Donc $\forall n \geqslant 2,\ N^n = N^2N^{n-2} = 0N^{n-2} = 0$.

Q17.

☞ Par une récurrence évidente $\forall n \geqslant 1,\ ND^n = ND$ puisque $ND = N$. Un calcul direct simple permet aussi de l'obtenir.

☞ Comme N et D commutent, nous pouvons utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \underbrace{=}_{N^2=0 \text{ si } n\geqslant 2} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} \\ = D^n + nN = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q18.

☞ On vérifie immédiatement que $X_{n+1} = AX_n$, en effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n + w_n \\ v_n + w_n \\ -u_n + v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

Q19.

- ☞ L'hypothèse : P_n : " $X_n = A^n X_0$" pour $n \in \mathbb{N}$.
- ☞ Initialisation : Puisque $A^0 = I_3$ et $A^0 X_0 = X_0$, donc P_0 est vrai.
- ☞ Transmission : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vrai, alors :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
- ☞ On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Q20.

- ☞ L'hypothèse : H_n : " $A^n = PT^n P^{-1}$" pour $n \in \mathbb{N}$.
- ☞ Initialisation : Puisque $A^0 = I_3$ et $PT^0 P^{-1} = I_3$, H_0 est vrai.
- ☞ Transmission : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n soit vrai, alors :

$$A^{n+1} = AA^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Donc $H_n \Rightarrow H_{n+1}$.
- ☞ On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^n P^{-1}$.

Q21.

- ☞ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & 2^n & 0 \\ 1+n & -n & n \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n \\ -2^n+n+1 & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ☞ On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n \\ -2^n+n+1 & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n \\ -2^n+n+1 \\ 1-2^n \end{pmatrix}$$

Problème 02

Partie I : Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$: $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \tfrac{a_1}{x-x_1} + \tfrac{a_2}{x-x_2} + \tfrac{a_3}{x-x_3}.$$

Q22. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$. D'une part $(x - x_1)g(x) = a_1 + a_2\dfrac{x - x_1}{x - x_2} + a_3\dfrac{x - x_1}{x - x_3}$, et comme x_1, x_2 et x_3 sont distincts,

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)g(x) = a_1.$$

D'autre part :

$$(x - x_1)g(x) = \frac{(x - x_1)P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\frac{Q(x)}{x-x_1}} = \frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(x_1)}{x - x_1}}$$

et comme Q est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_1} \frac{Q(x)-Q(x_1)}{x-x_1} = Q'(x_1)$. La fonction P étant polynomiale et continue, $\lim\limits_{x\to x_1} P(x) = P(x_1)$. Comme x_1, x_2 et x_3 sont distincts, x_1 est une racine simple de Q, donc $Q'(x_1) \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to x_1} (x - x_1)g(x) = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Par unicité de la limite, on obtient $\boxed{a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}}$. En remplaçant, dans le raisonnement précédent, x_1 par x_i, on obtient directement $\boxed{a_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}}$ et $\boxed{a_3 = \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)}}$.

Q23. Avec les données numériques pour cette question, on a $Q(x) = x(x+1)(x+\frac{1}{2})$, donc en dérivant avec la formule de dérivation du produit : $Q'(x) = (x+1)(x+\frac{1}{2}) + x(x+\frac{1}{2}) + x(x+1)$ qui donne $Q'(0) = \frac{1}{2}$, $Q'(-1) = \frac{1}{2}$ et $Q'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$. Finalement :

$$a_1 = a_2 = 2 \text{ et } a_3 = -4.$$

Partie II

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

Q24. La fonction F est définie en un réel x si et seulement si

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} > 0 \quad \text{et} \quad (2x+1)^2 \neq 0$$

c'est-à-dire $x(x+1) > 0$ et $x \neq -1/2$.
Compte-tenu de l'énoncé, on peut raisonner avec un tableau de signes.
Ce tableau permet de conclure que $\boxed{\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$.

Q25. La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, cette fonction est strictement positive sur $\mathcal{D}_F$ donc, par composition, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F}$.

Q26. Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, par formule de dérivation d'une composée et d'un quotient :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \times \frac{(x+x+1)(2x+1)^2 - x(x+1) \times 2 \times 2(2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{1}{x(x+1)} \times \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{(2x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \times \frac{4x^2+4x+1-4x^2-4x}{(2x+1)} = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} \end{aligned}$$

d'où la formule $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D}_F,\ f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}}$.

Q27-a Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. On pose $u_n = \left|f(n)z^{2n+1}\right|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > 0$ puis :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \frac{|z|^{2n+3}}{|z|^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^3}{2n^3}|z|^2 = |z|^2$$

Par le critère de d'Alembert :
- si $|z| < 1, \sum u_n$ converge donc $R \geqslant 1$;
- si $|z| > 1, \sum u_n$ diverge (grossièrement) donc $R \leq 1$.

d'où : $\boxed{R = 1}$.

Q27-b Cette fonction a un développement en série entière dont le rayon de convergence vaut 1 et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Q27-c-i On sait que la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. En effectuant un changement de variable (si $x \in]-1,1[$ alors $x^2 \in]-1,1[$), on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}.$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

Q27-c-ii Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. On a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{(1-x)\times(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$

Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x^2}$ s'exprime comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ On a précisément : $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)}$

Q27-d Avec la question précédente, on peut déterminer l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0. Celle-ci est donnée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$ qui s'écrit

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Or, d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière, le développement de cette fonction s'obtient à l'aide du développement en série entière de la question **II-Q27-c-i** avec le même rayon de convergence. Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ admet un développement en série entière sur $]-1,1[$ dont le rayon de convergence est $R = 1$ (c'est bien la même valeur qu'en **II-Q27-a**, et on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}.$$

Q27-e Lorsque $x \in]-1,1[$, $x^2 \in]-1,1[$ donc en effectuant un changement de variable dans **II-Q27-b**, on obtient l'égalité $\ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)x^{2n}$ puis en multipliant par $-x$ cette série convergente,

$$\boxed{\forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln(1-x^2)}.$$

Q27-f On a montré dans la partie **I** que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-\frac{1}{2},0\}$, $g(x) = \frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x+\frac{1}{2}}$ et comme $f = \frac{1}{2}g$, il vient alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}$.

De façon analogue à la méthode de la question **II-Q27-a**, on peut justifier que $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} - x^2\right) = -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - x.$$

Avec la décomposition en éléments simples de f, on obtient ainsi (toutes les séries étant convergentes), pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \big(-x\ln(1-x^2)\big) + \left(-\frac{\ln(1-x^2)}{x} - x\right) - 4 \times \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\right)\end{aligned}$$

puis

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} = 3x - \frac{x^2+1}{x}\ln(1-x^2) - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

et cette série entière converge.

Q27-g En reformulant l'expression précédente, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= 3x - \frac{x^2+1}{x}\big(\ln(1+x) + \ln(1-x)\big) - 2\ln(1+x) + 2\ln(1-x) \\ &= 3x - \frac{x^2+2x+1}{x}\ln(1+x) - \frac{x^2-2x+1}{x}\ln(1-x) \\ &= 3x - \frac{(x+1)^2}{x}\ln(1+x) - \frac{(x-1)^2}{x}\ln(1-x).\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2\ln(1-x) = 0$ par croissances comparées donc, par somme et quotient, l'expression précédente de la série entière admet un limite en 1 et :

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1}\right) = 3 - 4\ln(2)}.$$

Q28-a On a, par quotient, $f(n) \sim \frac{1}{2n^3}$ au voisinage de $+\infty$, or $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série usuelle de Riemann convergente (car $3 > 1$). Ainsi ($\sum f(n)$ étant une série à termes positifs), par critère d'équivalence des séries positives, $\boxed{\text{la série } \sum f(n) \text{ est convergente.}}$

Q28-b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare les termes pairs et impairs dans $H(2n+1)$ pour obtenir :

$$H(2n+1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k};$$

- les entiers k pairs entre 1 et $2n+1$ s'écrivent $k = 2p$, p variant de 1 (le premier pair est 2) à n (le dernier est $2n$) ;
- les entiers k impairs entre 1 et $2n+1$ s'écrivent $k = 2q+1$, q variant de 0 (le premier impair est 1) à n (le dernier est $2n+1$).

Ainsi :

$$H(2n+1) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1} = \frac{1}{2}H(n) + \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{2q+1}$$

qui donne le résultat (en renommant l'indice) : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)}$

Q28-c Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, avec la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) \\
&= H(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= H(n) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - 1\right) \\
&= H(n) + \left(H(n) - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 4\left(H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n) - 1\right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}}$.

Remarque Admettons qu'il existe une constante réelle γ (**appelée constante d'Euler**) telle que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$.

Avec ce développement asymptotique admis, on obtient, lorsque l'entier n est au voisinage de $+\infty$:

$$4H(n) - 4H(2n+1) = 4(\ln(n) + \gamma - \ln(2n+1) - \gamma) + o(1) = 4\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) + o(1)$$

donc, par composition, la limite demandée existe et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} 4H(n) - 4H(2n+1) = -4\ln(2)}$.

Par somme de limites dans la question **II-Q28-c**, on obtient : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = 3 - 4\ln(2)}$.

Exercice 02

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^a}.$$

On note les intégrales généralisées :

$$I_a = \int_0^1 f_a(t)\,dt \text{ et } J_a = \int_1^{+\infty} f_a(t)\,dt.$$

Q03. Si $\underline{a \leqslant 0}$, la fonction f_a est continue sur $[0,1]$ donc $\underline{I_a \text{ converge}}$.
Si $\underline{0 < a < 2}$, f_a est continue sur $]0,1]$ et

$$f_a \underset{0}{\sim} \frac{\pi x}{x^a} = \frac{\pi}{x^{a-1}}.$$

De plus, $a-1 < 1$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}dx$ converge (intégrale de Riemann), donc par équivalent des intégrales de fonctions positives $\underline{I_a \text{ converge}}$.

Si $\underline{a \geqslant 2}$ alors $a-1 \geqslant 1$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}dx$ diverge (intégrale de Riemann), puis par équivalent des intégrales de fonctions positives $\underline{I_a \text{ diverge}}$.

Q04. Pour tout $t \geqslant 1$, $|f_a(t)| \leqslant \frac{1}{t^a}$.

Si $a > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ converge (intégrale de Riemann), donc par comparaison des intégrales des fonctions positives $\int_1^{+\infty} |f_a(t)|dt$ converge i.e. $\underline{J_a \text{ converge absolument}}$.

Q05-a Soit $X > 1$. On pose $u(t) = \dfrac{1}{t^a}$ et $v'(t) = \sin(\pi t)$. Par intégration par parties :

$$\int_1^X f_a(t)dt = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi t^a}\right]_1^X - \int_1^X \frac{-a}{t^{a+1}} \frac{-\cos(\pi t)}{\pi} dt = \frac{-1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt.$$

Q05-b Pour les mêmes raisons qu'à la question Q27, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt$ converge absolument, en particulier, elle converge i.e. $X \mapsto \displaystyle\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$. Par ailleurs,

$$\left|\frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a}\right| \leq \frac{1}{\pi X^a} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

Finalement,

$$\int_1^X f_a(t)dt \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\frac{1}{\pi} - \frac{a}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt$$

La fonction $X \mapsto \displaystyle\int_1^X f_a(t)dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$ et ainsi J_a converge lorsque $a \in]0, 1]$.

Q06. D'après ce qui précède, J_a converge pour tout $a > 0$ (CVA pour $a > 1$ et CV pour $a \in]0, 1]$) et I_a converge ssi $a < 2$. En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ converge si $0 < a < 2$ (somme de deux intégrales convergentes) et diverge si $a \geqslant 2$ (somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente). En résumé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ converge si, et seulement si $0 < a < 2$.