

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 19

Du 17 mars 2025 au 22 mars 2025

1) Fonctions de plusieurs variables

Parties ouvertes, parties fermées, point adhérent, point intérieur, frontière, partie bornée. Notion de continuité et de dérivée partielle première ou seconde de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ avec $p = 2$ ou $p = 3$. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ou de classe $\mathcal{C}^2$. Vecteur gradient. Point critique. Extremum. Formule de Taylor à l'ordre 1. **Dérivées partielles premières et secondes de** $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$. Règle de la chaîne.

Théorème d'Hermann Schwarz.

Tangente à une courbe du type $f(x_1, x_2) = 0$ dans le plan ou plan tangent à une surface du type $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ dans l'espace.

2) Isométries vectorielles et matrices symétriques réelles dans un espace euclidien

Définition d'une isométrie vectorielle ou d'un endomorphisme orthogonal. Conservation du produit scalaire. Groupe orthogonal (attention la notion de groupe est hors programme). Conservation des bases orthonormales. Matrices orthogonales. Groupe orthogonal d'ordre n . Lien avec les bases orthonormales et les isométries vectorielles. Isométries positives, négatives. Groupe spécial orthogonal.

Description de $O(2)$.

Orientation d'un espace euclidien. Rotation d'angle θ dans le plan et rotation d'axe orienté et dirigé par $\vec{e}_1$ et d'angle θ dans l'espace. Attention, la classification des isométries de l'espace n'a pas été vue.

Symétries orthogonales (cas $n=2$ et $n=3$).

Une matrice M est une matrice de symétrie orthogonale si et seulement si $M^2 = I_n$ et $M^T = M$.

Warnung : le théorème spectral sera en colle 20 seulement.

Know-how :

Sur les fonctions de plusieurs variables :

- 1) Savoir distinguer et trouver l'intérieur, l'adhérence, la frontière dans des cas simples.
- 2) Savoir ce qu'est un point intérieur, un point de la frontière et un point adhérent.
- 3) Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables en un point (avec utilisation privilégiée des coordonnées polaires ou d'un chemin fourni par le colleur).
- 4) Calculer les dérivées partielles premières ou secondes en un point par dérivation par rapport à une variable, les autres étant fixes ou alors en revenant à la définition avec la limite.
- 5) Savoir montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou non sur $\mathbb{R}^2$.
- 6) Savoir résoudre une équation aux dérivées partielles du premier ordre ou du second ordre avec un changement de variables affine ou en coordonnées polaires.
- 7) Savoir déterminer les points critiques et essayer avec aide de voir s'ils correspondent à des extremums (par étude du signe de $f(x_1, x_2) - f(a, b)$, où (a, b) est un point critique en faisant du bricolage car la formule de Taylor à l'ordre 2 et donc les matrices hessiennes sont hors programme).
- 8) Savoir si une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, notamment par contraposée du théorème de Schwarz.
- 9) Écrire la tangente à $f(x, y) = 0$ ou le plan tangent à $f(x, y, z) = 0$ en un point non critique.

Sur les isométries vectorielles :

- 1) Savoir comment établir qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.
- 2) Comment montrer qu'un endomorphisme u de E euclidien est une isométrie.
- 3) Écrire la matrice d'une rotation plane d'angle θ ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une rotation plane dont on déterminera l'angle θ .
- 4) Écrire dans une base orthonormée la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera un vecteur unitaire.
- 5) Savoir décomposer toute rotation dans le plan en produit de deux symétries orthogonales par rapport à une droite.
- 6) Comment déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation r de E de dimension 3.
- 7) Savoir écrire analytiquement une symétrie orthogonale par rapport à une droite ou un plan dans l'espace à partir d'un vecteur unitaire de la droite ou d'un vecteur unitaire orthogonal au plan.