CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 20

Du 24 mars 2025 au 29 mars 2025

1) Fonctions de plusieurs variables

Reprendre le programme de la colle 19

2) Isométries vectorielles et matrices symétriques réelles dans un espace euclidien

Reprendre le programme de la colle 20 et rajouter :

Théorème spectral—.
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale. C'est-à-dire que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP = P^TAP$.
Warnung : la notion d'endomorphisme symétrique ou auto-adjoint n'est plus au programme en TSI2.

Know-how :

Sur les fonctions de plusieurs variables :

1) Savoir distinguer et trouver l'intérieur, l'adhérence, la frontière dans des cas simples.
2) Savoir ce qu'est un point intérieur, un point de la frontière et un point adhérent.
3) Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables en un point (avec utilisation privilégiée des coordonnées polaires ou d'un chemin fourni par le colleur).
4) Calculer les dérivées partielles premières ou secondes en un point par dérivation par rapport à une variable, les autres étant fixes ou alors en revenant à la définition avec la limite.
5) Savoir montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou non sur $\mathbb{R}^2$.
6) Savoir résoudre une équation aux dérivées partielles du premier ordre ou du second ordre avec un changement de variables affine ou en coordonnées polaires.
7) Savoir déterminer les points critiques et essayer avec aide de voir s'ils correspondent à des extremums (par étude du signe de $f(x_1, x_2) - f(a, b)$, où (a, b) est un point critique en faisant du bricolage car la formule de Taylor à l'ordre 2 et donc les matrices hessiennes sont hors programme).
8) Savoir si une fonction de deux variables est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, notamment par contraposée du théorème de Schwarz.
9) Écrire la tangente à $f(x, y) = 0$ ou le plan tangent à $f(x; y, z) = 0$ en un point non critique.

Sur les isométries vectorielles :

1) Savoir comment établir qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.
2) Comment montrer qu'un endomorphisme u de E euclidien est une isométrie.
3) Écrire la matrice d'une rotation plane d'angle θ ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une rotation plane dont on déterminera l'angle θ.
4) Écrire dans une base orthonormée la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera un vecteur unitaire.
5) Savoir décomposer toute rotation dans le plan en produit de deux symétries orthogonales par rapport à une droite.
6) Comment déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation r de E de dimension 3.
7) Savoir écrire analytiquement une symétrie orthogonale par rapport à une droite ou un plan dans l'espace à partir d'un vecteur unitaire de la droite ou d'un vecteur unitaire orthogonal au plan.
8) Reconnaître qu'une matrice est symétrique réelle donc diagonalisable puis la diagonaliser et enfin trouver une base orthonormale de vecteurs propres (en s'aidant éventuellement de **l'algorithme de Gram-Schmidt**)