L'exercice et le problème sont indépendants. Durée 4 heures. Pas de calculatrices

Exercice

Soit r l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est un élément de $SO(3)$. En déduire que r est une rotation.
2. Déterminer un vecteur unitaire $\vec{I}$ qui porte l'axe de la rotation r .
3. Déterminer l'angle θ de la rotation r .

Problème

Dans tout le sujet, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note E , l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F , l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Pour toute fonction f de E , on note ∇f son gradient.

On définit la fonction φ sur E par : $\forall f \in E, \varphi(f) = \nabla f$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ par

$$\forall f \in E, \varphi_{\vec{u}}(f) = \vec{u} \cdot \varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

PARTIE I

1. Démontrer que φ est une application linéaire à valeurs dans F .
2. Déterminer le noyau de φ . Qu'en déduit-on pour φ ?
3. (a) Énoncer le théorème de Schwarz pour les fonctions à plusieurs variables.
(b) Soit $V : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ . Démontrer que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

4. On pose, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = (1 + y^2 + y^2 z^2, xy(1 + z^2), xy^2 z)$.
(a) Justifier qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.
Qu'en déduit-on pour la fonction φ ?
(b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$.

PARTIE II

Soient $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les fonctions de E définies par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \cos(x), & f_2(x, y, z) &= \sin(x), \\ f_3(x, y, z) &= y \cos(x), & f_4(x, y, z) &= y \sin(x), \\ f_5(x, y, z) &= z \cos(x), & f_6(x, y, z) &= z \sin(x). \end{aligned}$$

On considère alors l'espace vectoriel G engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 .

Dans cette partie et la suivante, $\vec{u}$ désigne le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. On peut remarquer qu'avec ce choix de $\vec{u}$, $\varphi_{\vec{u}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$. On dit alors que $\varphi_{\vec{u}}(f)$ est la divergence de f .

De plus, on note ϕ_1 la restriction de la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ à G .

1. Démontrer que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est une base notée $\mathcal{B}$ de G .
2. Démontrer que ϕ_1 est un endomorphisme de G .
3. (a) Déterminer la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer A^2 .
(b) Sans calcul, donner les valeurs propres de A^2 et dire si A^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Qu'en est-il de A ?

- (c) De quelle(s) équation(s) aux dérivées partielles les vecteurs propres de $\phi_1^2 = \phi_1 \circ \phi_1$ sont-ils solutions ?
- (d) Déterminer l'ensemble des fonctions f solutions de l'équation $\phi_1^2(f) + f = 0$.
Indication : on cherchera des vecteurs colonnes X qui vérifient $A^2X = -X$.

PARTIE III

Soit f une fonction non nulle de E . On note S la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier.

Nous allons nous intéresser à quelques fonctions f de E telles que en tout point régulier M de S , le vecteur normal au plan tangent à S en M est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

1. (a) Donner la définition d'un point régulier M_0 de S puis donner une équation du plan tangent à S en ce point M_0 . On notera (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0 .

- (b) Lorsque f est définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$$

et M_0 est le point de coordonnées $(1, -1, 1)$, donner une équation du plan tangent à S au point M_0 . Cette fonction f répond-t-elle au problème ?

2. (a) Soit F_1 la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F_1(x, y, z) = (y - z)^2 - \alpha,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$? La fonction $f = F_1$ répond-elle au problème ? Décrire la surface associée.

- (b) Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction f , définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $f(x, y, z) = g(x - y, x - z)$ répond au problème.

- (c) La fonction F_1 est-elle de la forme précédente ?

3. Soit $\Gamma_1 = S \cap \Pi$ où S est la surface $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$ et Π est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

On considère les vecteurs : $\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i})$, et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$.

On note P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

- (a) Écrire P et vérifier que P est une matrice de rotation dont on donnera l'axe et le cosinus de son angle. Que vaut P^{-1} ?

- (b) Démontrer qu'un système d'équations de la courbe Γ_1 dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$\begin{cases} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2 \\ Z = 0 \end{cases},$$

où (X, Y, Z) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Indication : on rappelle que si (x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

- (c) On pose $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, vérifier que l'équation $5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2$ s'écrit : $U^T A U = 2$,

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

- (d) On pose $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'isométrie plane associée à Q et en déduire sans calculs Q^{-1} .

- (e) Calculer $D = Q^{-1} A Q$.

- (f) On pose $\vec{I} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ et $\vec{J} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$ et $U' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = Q^{-1}U$.

Calculer $(U')^T D U'$ et en déduire que dans $(0, \vec{I}, \vec{J})$, Γ_1 a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} X' = \alpha \cos t \\ Y' = \beta \sin t \end{cases},$$

où $t \in [0, 2\pi[$ et α, β sont à déterminer.

- (g) **Spécial 5/2** : Étudier l'arc paramétré $t \mapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t)$,

avec les valeurs α et β trouvées, puis dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dessiner les axes OX' et OY' puis dessiner Γ_1 .