

# 2TSI. Devoir surveillé 05

## CORRECTION

### Exercice

Dans l'espace euclidien rapporté à  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé direct, soit l'endomorphisme  $\phi$  canoniquement associé à la matrice  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

- $A \in O_3(\mathbb{R})$ , en effet si  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont les colonnes, on a clairement :

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \langle C_1, C_3 \rangle = \langle C_2, C_3 \rangle = 0 \text{ et } \langle C_1, C_1 \rangle = \langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = 1.$$

- Puis comme  $C_1 \wedge C_2 = C_3$ , la matrice  $A \in SO_3(\mathbb{R})$  et est donc une **rotation vectorielle**.
- On détermine l'axe de  $\phi$  par :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 3x \\ 2x + 2y - z = 3y \\ -x + 2y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}.$$

On trouve  $x = y = z$  et le vecteur  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  porte et oriente l'axe.

- Puis si  $\theta$  est l'angle de  $\phi$ , on a :

$$\text{tr } A = 2 = 2 \cos \theta + 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Puis on prend par exemple  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

On a rapidement :  $\phi(\vec{v}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3, 0, -3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ . On fait :

$$\text{Det}(\vec{n}, \vec{v}, \phi(\vec{v})) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta.$$

On en déduit que si l'on oriente l'axe de la rotation par  $\vec{n}$ , l'angle est  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

### Problème

Dans tout le sujet, l'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On note  $E$ , l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $F$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $E$ , on note  $\nabla f$  son gradient.

On définit la fonction  $\varphi$  sur  $E$  par :  $\forall f \in E, \varphi(f) = \nabla f$ .

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on définit la fonction  $\varphi_{\vec{u}}$  par

$$\forall f \in E, \varphi_{\vec{u}}(f) = \vec{u} \cdot \varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

## PARTIE I

1. Démontrons que  $\varphi$  est une application linéaire à valeurs dans  $F$ .

Soit  $f \in E$ . Notons  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  ses dérivées partielles respectives par rapport aux première, deuxième et troisième place.

$f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ , les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  y sont continues.

$\varphi$  est l'application  $f \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ . Elle est donc bien à valeurs dans  $F$ .

Par linéarité de la dérivation sur l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , les applications  $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}$  sont linéaires.

Ainsi,  $\forall f, g \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g) = \left( \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}, \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} \right)$ .

$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ .

Donc  $\varphi$  est bien une application linéaire à valeurs dans  $F$ .

2. Déterminons le noyau de  $\varphi$ . Qu'en déduit-on pour  $\varphi$  ?

Soit  $f \in E, \varphi(f) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  sont des fonctions nulles sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$ , ni de  $z$ .  $f$  est donc constante sur  $\mathbb{R}^3$ .

Réciproquement, si  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}^3$ , son gradient est nul.

On en déduit que le noyau de  $\varphi$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}^3$ . Il n'est pas réduit à la fonction nulle, donc  $\varphi$  est non injectif.

3-a Énonçons le théorème de Schwarz pour les fonctions à plusieurs variables.

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ , ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  la dérivée par rapport à la  $i^e$  place.

Alors  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \forall a \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ .

3-b Soit  $V : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  appartenant à l'image de  $\varphi$ .

Démontrons que :  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} ; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ .

Soit  $V : (x, y, z) \mapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  appartenant à l'image de  $\varphi$ .

$\exists f \in E$ , telle que  $V = \varphi(f)$ . On a alors  $P = \frac{\partial f}{\partial x}, Q = \frac{\partial f}{\partial y}$  et  $R = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

$V$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $P, Q$  et  $R$  le sont aussi. Les dérivées partielles de  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

On déduit du théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

4-a On pose, pour tout  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3, V(x, y, z) = (1 + y^2 + y^2 z^2, xy(1 + z^2), xy^2 z)$ .

• Justifions qu'il n'existe pas de fonction  $f$  telle que  $\nabla f = V$ .

$V$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ , ses composantes étant des fonctions polynômes en  $x, y, z$ .

Si par l'absurde, il existait une fonction  $f$  telle que  $\nabla f = V$ , on aurait  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Or  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = 2y(1 + z^2)$  et  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = y(1 + z^2)$ , donc  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , ce qui est contradictoire.

Donc il n'existe pas de fonction  $f$  telle que  $\nabla f = V$ .

- Qu'en déduit-on pour la fonction  $\varphi$  ?

On en déduit que la fonction  $\varphi$  n'est pas surjective.

**4-b** Déterminons toutes les fonctions  $f$  telles que  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2)$  est une primitive de  $x \mapsto x(1 + y^2 + y^2z^2)$ .

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, h(x, y, z) = \frac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2)$ . Les fonctions coordonnées de  $h$  sont des polynômes en  $x, y$  et  $z$  donc sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = x(1 + y^2 + y^2z^2), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = x^2y(1 + z^2) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = x^2y^2z.$$

On a donc bien  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla h(x, y, z) = xV(x, y, z)$ .

Soit  $f \in E$ ,  $f$  vérifie «  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$  » si et seulement si  $\varphi(f) = \varphi(h)$ , c'est-à-dire, par linéarité de  $\varphi$ ,  $f - h \in \ker \varphi$ .

D'après la question 2., l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$  est  $\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \frac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2) + k, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ .

## PARTIE II

Soient  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  les fonctions de  $E$  définies par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{ll} f_1(x, y, z) = \cos(x), & f_2(x, y, z) = \sin(x), \\ f_3(x, y, z) = y \cos(x), & f_4(x, y, z) = y \sin(x), \\ f_5(x, y, z) = z \cos(x), & f_6(x, y, z) = z \sin(x). \end{array}$$

On considère alors l'espace vectoriel  $G$  engendré par les fonctions  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  et  $f_6$ .

**Dans cette partie et la suivante**,  $\vec{u}$  désigne le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . On peut remarquer qu'avec ce choix de  $\vec{u}$ ,  $\phi_{\vec{u}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$ . On dit alors que  $\phi_{\vec{u}}(f)$  est la divergence de  $f$ . De plus, on note  $\phi_1$  la restriction de la fonction  $\phi_{\vec{u}}$  à  $G$ .

**1.** Démontrons que  $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$  est une base notée  $\mathcal{B}$  de  $G$ .

$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$  est une famille génératrice de  $G$ . Donc pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$  tel que  $\sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i = 0$ . Ainsi, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on peut écrire :

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 y \cos(x) + \lambda_4 y \sin(x) + \lambda_5 z \cos(x) + \lambda_6 z \sin(x).$$

Pour  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , on obtient :  $\lambda_1 = 0$ .

Pour  $(x, y, z) = (\pi/2, 0, 0)$ , on obtient :  $\lambda_2 = 0$ .

Ainsi :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \lambda_3 y \cos(x) + \lambda_4 y \sin(x) + \lambda_5 z \cos(x) + \lambda_6 z \sin(x)$ .

Pour  $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ , on obtient :  $\lambda_3 = 0$ .

Pour  $(x, y, z) = (\pi/2, 1, 0)$ , on obtient :  $\lambda_4 = 0$ .

Pour  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ , on obtient :  $\lambda_5 = 0$ .

Pour  $(x, y, z) = (\pi/2, 0, 1)$ , on obtient :  $\lambda_6 = 0$ .

Ainsi :  $\sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_6) = (0, \dots, 0)$ .

Ainsi  $\mathcal{B}$  est libre, donc c'est une base de  $G$ .

**2.** Démontrons que  $\phi_1$  est un endomorphisme de  $G$ .

- La **linéarité** de  $\phi_1$  découle de celle du gradient et de la bilinéarité du produit scalaire. Plus précisément, si  $(f, g) \in G$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} \phi_1(f + \lambda g) &= \phi_{\vec{u}}(f + \lambda g) = \vec{u} \cdot \nabla(f + \lambda g) \\ &= \vec{u} \cdot (\nabla(f) + \lambda \nabla(g)) \text{ car le gradient est linéaire} \\ &= \vec{u} \cdot \nabla(f) + \lambda \vec{u} \cdot \nabla(g) \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \phi_{\vec{u}}(f) + \lambda \phi_{\vec{u}}(g) \end{aligned}$$

Alors :  $\phi_1(f + \lambda g) = \phi_1(f) + \lambda \phi_1(g)$ .

• Comme  $G = \text{Vect}\{\mathcal{B}\}$ , pour **justifier que**  $\phi_1 \in \mathcal{L}(G)$ , il suffit que montrer que :  $\forall i$  entier entre 1 et 6,  $\phi_1(f_i) \in G$ .

Remarquons que :  $\forall f \in G$ ,  $\phi_1(f) = \vec{u} \cdot \nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\phi_1(f_1) &= -f_2; & \phi_1(f_2) &= f_1 \\ \phi_1(f_3) &= f_1 - f_4; & \phi_1(f_4) &= f_2 + f_3 \\ \phi_1(f_5) &= f_1 - f_6; & \phi_1(f_6) &= f_2 + f_5\end{aligned}$$

• En conclusion,  $\phi_1$  est linéaire et  $\phi_1(\mathcal{B}) \subset G$  donc  $\phi_1 \in \mathcal{L}(G)$ .

**3-a** Déterminons la matrice  $A$  de  $\phi_1$  dans la base  $\mathcal{B}$ , puis calculons  $A^2$ .

D'après les calculs de la questions précédente, la matrice  $A$  de  $\phi_1$  dans la base  $\mathcal{B}$  vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer  $A^2$  on peut soit faire soigneusement le calcul matriciel, soit calculer  $\phi_1^2(f_i)$  pour  $i = 1, \dots, 6$ .

$$\begin{aligned}\phi_1^2(f_1) &= \phi_1(-f_2) = -f_1 \\ \phi_1^2(f_2) &= \phi_1(f_1) = -f_2 \\ \phi_1^2(f_3) &= \phi_1(f_1 - f_4) = -f_2 - (f_2 + f_3) = -2f_2 - f_3 \\ \phi_1^2(f_4) &= \phi_1(f_2 + f_3) = f_1 + f_1 - f_4 = 2f_1 - f_4 \\ \phi_1^2(f_5) &= \phi_1(f_1 - f_6) = -f_2 - (f_2 + f_5) = -2f_2 - f_5 \\ \phi_1^2(f_6) &= \phi_1(f_2 + f_5) = 2f_1 - f_6\end{aligned}$$

On en déduit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3-b** • Sans calcul, donnons les valeurs propres de  $A^2$  et dire si  $A^2$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

La matrice  $A^2$  est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi  $\text{Sp}(A^2) = \{-1\}$ .

Raisonnons par l'absurde. Si  $A^2$  était diagonalisable, il existerait donc une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}A^2P = D$  où  $D$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres sur la diagonale; ainsi on aurait  $P^{-1}A^2P = (-1)I_6$ . Donc on pourrait écrire  $A^2 = P(-1)I_6P^{-1} = -I_6$  et donc  $A^2$  serait diagonale, ce qui n'est pas le cas. Ainsi  $A^2$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

• Qu'en est-il de  $A$ ?

Si  $A$  était diagonalisable, il existerait une matrice  $Q$  inversible et une matrice  $\Delta$  diagonale telles que  $Q^{-1}AQ = \Delta$  et l'on pourrait écrire  $A^2 = Q\Delta Q^{-1}Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta^2Q^{-1}$  avec  $\Delta^2$  diagonale. Donc  $A^2$  serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

**3-c** De quelle(s) équation(s) aux dérivées partielles les vecteurs propres de  $\phi_1^2 = \phi_1 \circ \phi_1$  sont-ils solutions?

Soit  $f$  un vecteur propre de  $\phi_1$ . Comme la seule valeur propre de  $\phi_1$  est  $-1$ ,  $f$  vérifie :  $\phi_1^2(f) = -f$ .

$$\begin{aligned}\phi_1^2(f) &= \phi_1\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Or  $f$  est de classe  $C^2$  donc d'après le théorème d'Hermann Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

$$\phi_1^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right).$$

Ainsi l'équation aux dérivées partielles vérifiée par les vecteurs propres de  $\phi_1$  est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + f = 0.$$

**3-d** Déterminons l'ensemble des fonctions  $f$  solutions de l'équation  $\phi_1^2(f) + f = 0$ .

Indication : on cherchera des vecteurs colonnes  $X$  qui vérifient  $A^2 X = -X$ .

Chercher les solutions dans  $G$  de «  $\phi_1^2(f) + f = 0$  » revient à chercher les vecteurs propres de  $A^2$ , c'est

à dire les éléments de  $\text{Ker}(A^2 + I_6)$ . Posons  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ . Alors :

$$X \in \text{Ker}(A^2 + I_6) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d + f = 0 \text{ et } c + e = 0.$$

$$\Leftrightarrow X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(A^2 + I_6) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cette famille est libre de manière évidente, donc c'est une base de l'espace propre. En revenant à l'application linéaire  $\phi_1^2$  associée à la matrice  $A^2$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on obtient :

$$\phi_1^2(f) + f = 0 \Leftrightarrow f \in \text{Vect} \{f_1; f_2; f_3 - f_5; f_4 - f_6\}.$$

### PARTIE III

Soit  $f$  une fonction non nulle de  $E$ . On note  $S$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ . On suppose que les fonctions  $f$  choisies dans la suite sont telles que la surface  $S$  est non vide et qu'au moins un point de  $S$  est régulier.

Nous allons nous intéresser à quelques fonctions  $f$  de  $E$  telles que en tout point régulier  $M$  de  $S$ , le vecteur normal au plan tangent à  $S$  en  $M$  est orthogonal au vecteur  $\vec{u}$ .

**1-a** Donnons la définition d'un point régulier  $M_0$  de  $S$  puis donnons une équation du plan tangent à  $S$  en ce point  $M_0$ . On notera  $(x_0, y_0, z_0)$  les coordonnées de  $M_0$ .

On dit que  $M_0$  est régulier lorsque  $\nabla(f)(M_0) \neq 0$ .

Lorsque  $M_0$  est régulier,  $\nabla(f)(M_0)$  est un vecteur normal au plan tangent, que l'on notera  $\pi_{M_0}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \pi_{M_0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \nabla(f)(M_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \nabla(f)(M_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0. \end{aligned}$$

ce qui est une équation cartésienne du plan tangent à  $S$  en  $M_0$ .

**1-b** • Lorsque  $f$  est définie par :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$  et  $M_0$  est le point de coordonnées  $(1, -1, 1)$ , donnons une équation du plan tangent à  $S$  au point  $M_0$ .

On suppose que :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$  et  $M_0$  est le point de coordonnées  $(1, -1, 1)$ . Alors  $\nabla(f)(x, y, z) = (2x, 4y, -2z)$  et donc  $\nabla(f)(M_0) = (2, -4, -2)$ ;  $M_0$  est régulier.

Une équation cartésienne du plan tangent à  $S$  en  $M_0$  est  $2(x - 1) - 4(y + 1) - 2(z - 1) = 0$  c'est à dire :

$$2x - 4y - 2z - 4 = 0.$$

• Cette fonction  $f$  répond-elle au problème ?

Enfin  $\nabla(f)(M_0) \cdot \vec{N} = -4 \neq 0$  donc cette fonction  $f$  ne répond pas au problème.

**2-a** • Soit  $F_1$  la fonction définie par :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F_1(x, y, z) = (y - z)^2 - \alpha$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  ?. La fonction  $f = F_1$  répond-elle au problème ?

On suppose que  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = F_1(x, y, z) = (y - z)^2 - \alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

Alors  $\nabla(f)(x, y, z) = (0, 2(y - z), -2(y - z)) = 2(y - z) \cdot (0, 1, -1)$ .

Tous les points  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  tels que  $y_0 \neq z_0$  sont donc réguliers. En chacun de ces points, la normale au plan tangent est de plus dirigée par le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(0, 1, -1)$ . Ce vecteur étant orthogonal à  $\vec{u}$ , la fonction  $f = F_1$  répond au problème.

• Décrivons la surface associée.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in S &\Leftrightarrow (y - z)^2 = \alpha \Leftrightarrow |y - z| = \sqrt{\alpha} \text{ avec } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow y - z = \sqrt{\alpha} \text{ ou bien } y - z = -\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Comme  $\alpha > 0$ , on peut dire que  $\sqrt{\alpha} \neq -\sqrt{\alpha}$  et donc :

$S$  est la réunion des deux plans d'équations respectives  $y - z = \sqrt{\alpha}$  et  $y - z = -\sqrt{\alpha}$ .

N.B. : ce sont des plans parallèles.

**2-b** Soit  $g$  une fonction non nulle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Vérifions que la fonction  $f$ , définie par :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = g(x - y, x - z)$  répond au problème.

Soit  $g$  une fonction non nulle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  définie par :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = g(x - y, x - z)$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (composition de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ ) et de plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \partial_1 g(x - y, x - z) + \partial_2 g(x - y, x - z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -\partial_1 g(x - y, x - z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -\partial_2 g(x - y, x - z) \end{aligned}$$

Donc  $\nabla(f)(x, y, z) \cdot (\vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}) = 0$ .

Ainsi, en tout point régulier  $M_0$  de  $S$ , le vecteur  $\nabla(f)(M_0)$  est normal au plan tangent et est orthogonal à  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Donc la fonction  $f$  répond au problème.

**2-c** La fonction  $F_1$  est-elle de la forme précédente ?

Si l'on pose  $g(u, v) = (v - u)^2 - \alpha$ , alors  $g(x - y, x - z) = (x - z - (x - y))^2 - \alpha = (y - z)^2 - \alpha = F_1(x, y, z)$ . La fonction  $F_1$  est bien de la forme précédente.

**3-a** Soit  $\Gamma_1 = S \cap \Pi$  où  $S$  est la surface  $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$  et  $\Pi$  est le plan d'équation  $x + y + z = 0$ .

On considère les vecteurs  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ ,  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i})$ , et  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ .

On note  $P$  la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

• Écrivons  $P$ .

On a :  $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$  et  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$  et donc :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

• Vérifions que  $P$  est une matrice de rotation dont on donnera l'axe et le cosinus de son angle.

Les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_3$  sont de norme 1 et de plus  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$ .

Comme  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ , on en déduit que  $(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ ; puis, par permutation circulaire :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est aussi une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ .

$P$  étant la matrice de passage d'une base orthonormée directe à une autre,  $P$  est une matrice de rotation.

**Remarque.** Le lecteur courageux ou inconscient fera le calcul du déterminant et trouvera après épuisement 1.

Pour l'axe, on pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et on résout :

$$PX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x\sqrt{3} + y + z\sqrt{2} = x\sqrt{6} \\ -2y + z\sqrt{2} = y\sqrt{6} \\ x\sqrt{3} + y + z\sqrt{2} = x\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x(\sqrt{3} + \sqrt{6}) + y + z\sqrt{2} = 0 \\ -(2 + \sqrt{6})y + z\sqrt{2} = 0 \\ x\sqrt{3} + y + z(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 0 \end{cases}.$$

Il ressort en faisant la différence des deux premières lignes,

$$x = \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)y.$$

De même,  $z = \frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}}y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})y$ . Il reste :

$$(x, y, z) = \left( (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)y, y, (\sqrt{2} + \sqrt{3})y \right).$$

Une base de l'axe est  $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 1)$ .

De plus :

$$1 + 2 \cos \theta = -\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-3}{4} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6}.$$

• Que vaut  $P^{-1}$ ?

On a tout simplement :  $P^{-1} = P^T$ .

**3-b** Démontrons qu'un système d'équations de la courbe  $\Gamma_1$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est

$$\begin{cases} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2 \\ Z = 0 \end{cases},$$

où  $(X, Y, Z)$  désignent les coordonnées d'un point  $M$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Indication : on rappelle que si  $(x, y, z)$  sont les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$  donc la condition «  $x + y + z = 0$  » s'écrit «  $Z = 0$  ».

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} (x - z)^2 + (y - z)^2 &= \left( \frac{-X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \left( \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 + \left( \frac{-2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \left( \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 \\ &= (-\sqrt{2}X)^2 + \left( \frac{-X}{\sqrt{2}} - \frac{3Y}{\sqrt{6}} \right)^2 \\ &= 2X^2 + X^2/2 + 3Y^2/2 + \sqrt{3}XY \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1 \Leftrightarrow 2X^2 + X^2/2 + 3Y^2/2 + \sqrt{3}XY = 1 \Leftrightarrow 5X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}XY = 2.$$

Ainsi :

$$M \in S \cap \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (x - z)^2 + (y - z)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ 5X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}XY = 2 \end{cases}$$

**3-c** On pose  $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , vérifions que l'équation  $5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2$  s'écrit :  $U^T A U = 2$ , où  $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ .

On a :

$$U^T A U = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5X + Y\sqrt{3} & X\sqrt{3} + 3Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U^T A U = X(5X + Y\sqrt{3}) + Y(X\sqrt{3} + 3Y) = 5X^2 + 3Y^2 + XY2\sqrt{3} = 2.$$

**3-d** On pose  $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ . Reconnaissons l'isométrie plane associée à  $Q$  et déduisons sans calculs  $Q^{-1}$ .

On remarque que c'est une rotation plane d'angle  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et  $Q^{-1}$  est la rotation plane d'angle  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .

**3-e** Calculons  $D = Q^{-1}A Q$ .

$$\begin{aligned} Q^{-1}A Q &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et finalement :  $Q^{-1}A Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**3-f** On pose  $\vec{I} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$  et  $\vec{J} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$  et  $U' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = Q^{-1}U$ .

• Calculons  $(U')^T D U'$ .

$$(U')^T D U' = (Q^{-1}U)^T D Q^{-1}U = U^T Q D Q^{-1}U = U^T Q(Q^{-1}A Q)Q^{-1}U = U^T A U = 2.$$

- Déduisons en que dans  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\Gamma_1$  a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} X' &= \alpha \cos t \\ Y' &= \beta \sin t \end{cases} ,$$

où  $t \in [0, 2\pi[$  et  $\alpha, \beta$  sont à déterminer.

On peut écrire, d'après plus haut :

$$(U')^T DU' = \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6X' & 2Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$(U')^T DU' = 2 = 6X'^2 + 2Y'^2 \Rightarrow 3X'^2 + Y'^2 = 1.$$

$$3X'^2 + Y'^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X'^2}{\frac{1}{3}} + Y'^2 = 1$$

Donc on pose  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\beta = 1$ .

**3-g** Étudions l'arc paramétré  $t \mapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t)$ ,

avec les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  trouvées, puis dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , dessinons les axes  $OX'$  et  $OY'$  puis  $\Gamma_1$ .

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , étudions l'arc. On remarque que les fonctions  $t \mapsto X'(t)$  et  $t \mapsto Y'(t)$  sont de période  $2\pi$ . On prend  $t \in [-\pi, \pi]$ . Puis comme  $X'$  est paire et  $Y'$  est impaire, on se ramène à  $t \in [0, \pi]$  et on effectuera une symétrie par rapport à  $OX'$ . Puis  $X'(\pi - t) = -X'(t)$  et  $Y'(\pi - t) = Y'(t)$ , donc on peut se ramener à  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et on effectuera une symétrie par rapport à  $OY'$ .

On a pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $X'(t)$  décroît de  $1/\sqrt{3}$  à 0 et  $Y'(t)$  croît de 0 à 1. La pente de la tangente en  $t = 0$  est verticale et est horizontale en  $t = \frac{\pi}{2}$ .