TSI2. Devoir mathématiques 06

Solution

Exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère la surface $\mathcal{S}$ de représentation paramétrique dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x(u,v) = u + 3v \\ y(u,v) = uv \\ z(u,v) = \sin(\pi u) + \cos(\pi v) \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,v)$ le point de $\mathcal{S}$ de coordonnées $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ dans $\mathcal{R}'$.
On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{OM(u,v)}$ a aussi pour composantes $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.
Ainsi la surface $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points $M(u,v)$ quand u et v parcourent $\mathbb{R}$.
En particulier le point A de composantes $(1,0,1)$ dans $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{S}$ car pour $u = 1$ et $v = 0$, on a $(x(1,0), y(1,0), z(1,0)) = (1,0,1)$ et donc $M(1,0) = A$.

1. Résolvons le système d'inconnue (u,v) : $\begin{cases} u + 3v &= 2 \\ uv &= -1 \end{cases}$.

Par exemple partons de $u = 2 - 3v$ et remplacons dans l'autre équation.

$$uv = -1 \Rightarrow (2-3v)v = -1 \Rightarrow 3v^2 - 2v - 1 = 0 \Rightarrow v = 1 \text{ ou } v = -\frac{1}{3}.$$

Alors on obtient deux solutions $(u,v) = (-1,1)$ et $(u,v) = (3, -\frac{1}{3})$ car $u = -\frac{1}{v}$.

2. Trouvons alors l'unique couple (u,v) tel que $M(u,v)$ est l'unique point B de $\mathcal{S}$ de coordonnées $(2,-1,-1)$ dans $\mathcal{R}$.

$B(2,-1,-1) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 3v = 2 \\ uv = -1 \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1 \end{cases}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^2$

Si $(u,v) = (-1,1)$, $\sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1$ et si $(u,v) = \left(3, -\dfrac{1}{3}\right)$, $\sin(\pi u) + \cos(\pi v) = \dfrac{1}{2} \neq -1$.

Donc le système $\begin{cases} u + 3v = 2 \\ uv = -1 \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1 \end{cases}$ admet pour unique solution $(-1,1)$.

Ainsi, $M(-1,1)$ est l'unique point de $\mathcal{S}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial u} = (1, v, \pi\cos(\pi u))$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial v} = (3, u, -\pi\sin(\pi v))$.

4. • Les coordonnées de $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial v}$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ sont :

$$(-v\pi\sin(\pi v) - u\pi\cos(\pi u),\ \pi\sin(\pi v) + 3\pi\cos(\pi u),\ u - 3v).$$

- Calculons ce vecteur pour $u = -1$ et $v = 1$ que l'on notera $\vec{n}$. Immédiatement $\vec{n}(-\pi, -3\pi, -4)$.
- Trouvons une équation du plan Π orthogonal à $\vec{n}$ et qui passe par le point $B(2,-1,-1)$.

Un point $N(x,y,z) \in \Pi$ si et seulement si

$$\overrightarrow{BN}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z+1 & -\pi & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\pi(x-2) - 3\pi(y+1) - 4(z+1) = 0.$$

Finalement, $\pi x + 3\pi y + 4z = -\pi - 4$ est une équation cartésienne du plan Π.

Problème

Ici l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct noté $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère les fonctions

- ☞ r_0 définie sur $I_0 = [0;2\pi]$ par $\forall t \in I_0, r_0(t) = R$ où $R > 0$;
- ☞ r_1 définie sur $I_1 = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1, r_1(t) = \cos(t)$.
- ☞ r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2, r_2(t) = \mathrm{e}^t$.
- ☞ r_3 définie sur $I_3 =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ par $\forall t \in I_3, r_3(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$.

Pour tout $n \in [\![0,3]\!]$, on note

- ☞ Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_n(t) = r_n(t)\cos(t) \\ y_n(t) = r_n(t)\sin(t) \end{cases}, t \in I_n$;
- ☞ $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

Partie A :

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Précisons ses éléments caractéristiques.

Λ_0 est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_0(t) = R\cos(t) \\ y_0(t) = R\sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Ainsi, $M(x,y) \in \Lambda_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$ et Λ_0 est le cercle de centre O et de rayon R.

2. Λ_1 est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_1(t) = \cos^2(t) \\ y_1(t) = \cos(t)\sin(t) \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Or, pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2t)$ et $\sin(t)\cos(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$.

On effectue le changement de paramétrage admissible $u = 2t$.

Λ_1 est donc aussi la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} X_1(u) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(u) \\ Y_1(u) = \dfrac{1}{2}\sin(u) \end{cases}, u \in [-\pi, \pi]$

On reconnaît le paramétrage du cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Partie B :

1. x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel f, $\begin{cases} x_2'(t) = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t \cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y_2'(t) = e^t(\cos t + \sin t) = \sqrt{2}e^t \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

2. La longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$ est

$$l = \int_{-\ln(3)}^{3\ln(2)} \sqrt{2}e^t\sqrt{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,dt = \sqrt{2}\left(e^{3\ln(2)}-e^{-\ln(3)}\right) = \sqrt{2}\left(8-\frac{1}{3}\right)ul.$$

La longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$ est $\dfrac{23\sqrt{2}}{3}$ unités de longueur.

3. La courbe Λ_2 est de longueur finie si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}e^t dt$ converge, ce qui est faux, donc Λ_2 n'est pas de longueur finie.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Etant donné que $x_2'^2(t)+y_2'^2(t) = 2e^{2t} \neq 0$, la tangente au point $M_2(t)$ est verticale si et seulement si $x_2'(t) = 0$.

Or $x_2'(t) = \sqrt{2}e^t\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc la tangente au point $M_2(t)$ est verticale si et seulement si

$$t \in \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Les points de Λ_2 pour lesquels la tangente est verticale sont les points de coordonnées

$$\left((-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}, (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}\right), \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{Z}.$$

Leur abscisse est égale à leur ordonnée, ils appartiennent donc à la première bissectrice et sont donc alignés.

Finalement, tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés, ils appartiennent à la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}$.

Partie C :

1. Λ_3 est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_3(t) = \sin^2(t) \\ y_3(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

I_3 est symétrique par rapport à 0, x_3 est paire et y_3 est impaire, donc pour tout $t \in I_3$, $M_3(-t)$ est l'image de $M_3(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Ainsi, on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I_3' = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On obtiendra la courbe Λ_3 en entier en traçant la symétrique de la courbe tracée pour $t \in I_3'$ par rapport à (Ox).

2. x_3 et y_3 sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I_3'.

Pour tout $t \in I_3'$, $x_3'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $y_3'(t) = \dfrac{3\cos^2(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)}{\cos^2(t)}$.

x_3 est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et par limites usuelles, $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} y_3(t) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x_3'(t)$	0	$+$	
x_3	0	$\nearrow$	1
y_3	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||
$y_3'(t)$	0	$+$	

3. On a $x_3'(0) = y_3'(0) = 0$. $M_3(0)$ est donc un point stationnaire (ou singulier).

$x_3(t) \underset{0}{\sim} t^2$ et x_3 est paire donc $x_3(t) \underset{0}{=} t^2 + o(t^3)$

On peut aussi partir de $x_3(t) = \left(t - \dfrac{t^3}{6}\right)^2 + o(t^3) = t^2 + o(t^3)$.

$y_3(t) \underset{0}{\sim} t^3$, donc $y_3(t) \underset{0}{=} t^3 + o(t^3)$.

On peut aussi partir de $y_3(t) = \dfrac{\left(t - \dfrac{t^3}{6}\right)^3 + o(t^3)}{1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)} = \left(t - \dfrac{t^3}{6}\right)^3 \left(1 + \dfrac{t^2}{2}\right) + o(t^3) = t^3 + o(t^3)$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \underset{0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o_{\mathbb{R}^2}(t^3)$, où $o_{\mathbb{R}^2}(t^3)$ désigne un élément de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont négligeables devant t^3 au voisinage de 0.

On en déduit que le premier vecteur dérivée non nul est le vecteur dérivée seconde, il est égal à $\vec{i}$, et dirige la tangente à Λ_3 en $M_3(0)$.
Le premier vecteur dérivée lui étant non colinéaire est le vecteur dérivée 3^e.
$M_3(0)$ est donc un point de rebroussement de première espèce et la tangente en ce point est l'axe des abscisses.

4. $M_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, le vecteur dérivée ne s'annule pas en ce point, c'est un point régulier de la courbe.
Le vecteur dérivé en ce point est donc un vecteur directeur de la tangente ' a Λ_3 en ce point et il a pour coordonnées $(1, 2)$.

5. $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} x_3(t) = 1$. et $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} y_3(t) = +\infty$, Λ_2 admet donc pour asymptote en $\dfrac{\pi}{2}$ la droite verticale d'équation $x = 1$

6. Figure :