TSI2. Devoir mathématiques 06

Samedi 05 Avril 2025. Durée 2 heures. Pas de calculettes

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface $\mathcal{S}$ de représentation paramétrique dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x(u,v) = u + 3v \\ y(u,v) = uv \\ z(u,v) = \sin(\pi u) + \cos(\pi v) \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,v)$ le point de $\mathcal{S}$ de coordonnées $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ dans $\mathcal{R}$.

On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{OM(u,v)}$ a aussi pour composantes $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Ainsi la surface $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points $M(u,v)$ quand u et v parcourent $\mathbb{R}$.

En particulier le point A de composantes $(1,0,1)$ dans $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{S}$ car pour $u = 1$ et $v = 0$, on a $(x(1,0), y(1,0), z(1,0)) = (1,0,1)$ et donc $M(1,0) = A$.

1. Résoudre le système d'inconnue (u,v) : $\begin{cases} u + 3v & = & 2 \\ uv & = & -1 \end{cases}$.
2. Trouver alors l'unique couple (u,v) tel que $M(u,v)$ est l'unique point B de $\mathcal{S}$ de coordonnées $(2,-1,-1)$ dans $\mathcal{R}$.
3. Calculer les coordonnées de $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial u}$ et de $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial v}$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
4. Déterminer les coordonnées de $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM(u,v)}}{\partial v}$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
   Calculer ce vecteur pour $u = -1$ et $v = 1$ que l'on notera $\vec{n}$.
   Trouver une équation du plan Π orthogonal à $\vec{n}$ et qui passe par le point $B(2,-1,-1)$.
   On admettra que Π est le plan tangent à $\mathcal{S}$ en B.

Problème

Ici l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct noté $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les fonctions

- ☞ r_0 définie sur $I_0 = [0; 2\pi]$ par $\forall t \in I_0, r_0(t) = R$ où $R > 0$;
- ☞ r_1 définie sur $I_1 = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1, r_1(t) = \cos(t)$.
- ☞ r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2, r_2(t) = \mathrm{e}^t$.
- ☞ r_3 définie sur $I_3 = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\forall t \in I_3, r_3(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$.

Pour tout $n \in [\![0,3]\!]$, on note

- ☞ Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_n(t) = r_n(t)\cos(t) \\ y_n(t) = r_n(t)\sin(t) \end{cases}, t \in I_n$;
- ☞ $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes

T.S.V.P →

Partie A :

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   Indication : on utilisera des formules trigonométriques qui expriment $\cos(2t)$ *et* $\sin(2t)$ *en fonction de* $\cos t$ *et de* $\sin t$.

Partie B :

1. Exprimer la dérivée $x_2'(t)$ sous la forme $\alpha\, e^t \cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, où α est un réel indépendant de t à déterminer. De même, exprimer la dérivée $y_2'(t)$ sous la forme $\beta\, e^t \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, où β est un réel indépendant de t à déterminer.
2. Calculer la longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$.
3. La courbe Λ_2 est-elle de longueur finie ?
4. Démontrer que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés.
   On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient.

Partie C :

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I_3' = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Préciser comment obtenir la courbe Λ_3 en entier.
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I_3'.
   Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.
3. Faire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $t=0$ de $t \mapsto x_3(t)$. Faire de même avec $t \mapsto y_3(t)$. Quelle est la nature du point $M_3(0)$? Préciser la tangente en ce point.
4. Donner les coordonnées du point $M_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point.
5. Étudier la branche infinie lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Tracer la courbe Λ_3. On y fera apparaître les éléments déterminés dans les questions précédentes.