Correction DS N°01

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. On a : $f(1) = \arcsin 1 + 2\arctan 0 = \frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin 0 + 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

2. • f_1 est définie si et seulement si $2x - 1 \in [-1, 1]$ donc pour $x \in [0, 1]$. C'est le domaine de définition de f_1.

• f_2 est définie si et seulement si $\frac{1-x}{x} \geqslant 0$ et $x \neq 0$.
1er cas : $x > 0$ et alors $1 - x \geqslant 0$ ce qui donne $x \in]0, 1]$.
2e cas : $x < 0$ et alors $1 - x \leqslant 0$ et donc $x \geqslant 1$. Alors $x \in \emptyset$.
Ainsi le domaine de définition de f_2 est $]0, 1]$.

• Le domaine de définition de f est $I = [0, 1] \cap]0, 1] =]0, 1]$.

3 Comme $x \in]0, 1]$, x peut s'écrire $\cos^2 \alpha$.
De plus, pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a bien $\cos^2 \alpha \in [0, 1[$. Alors :

$$f_1(\cos^2 \alpha) = \arcsin(2\cos^2 \alpha - 1) = \arcsin(\cos 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(2\alpha)) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

car $2\alpha \in [0, \pi]$. Puis :

$$f_2(\cos^2 \alpha) = 2\arctan\sqrt{\frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2\arctan\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2\arctan\sqrt{\tan^2 \alpha} = 2\arctan|\tan\alpha| = 2\alpha$$

car $\tan\alpha \geqslant 0$ et $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il reste à écrire $f(x) = f_1(\cos^2 \alpha) + f_2(\cos^2 \alpha) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Remarque : on peut aussi dériver.
Comme $(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ avec $u(x) = 2x - 1$, on a :

$$\forall x \in]0, 1[,\ f_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

De même, $(\arctan v(x))' = \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}$ avec $v(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
Et $v'(x) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x}{1-x}} \times \left(\frac{1-x}{x}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}}$. Alors :

$$\forall x \in]0, 1[,\ f_2'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = -\frac{x}{2x\sqrt{x-x^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et donc f est constante sur $]0, 1[$. Par continuité, elle l'est aussi sur I et d'après **1**, cette constante est $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 02

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $x_0 = y_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \sqrt{7-y_n} \\ y_{n+1} & = & \sqrt{7+x_n} \end{array}\right.$.

1. Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $x_n \in [0,7]$ et $y_n \in [0,7]$ ».

• *Initialisation*

Il est clair que $x_0 = 0 \in [0,7]$ et $y_0 = 0 \in [0,7]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *transmission*

Supposons la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $x_n \in [0,7]$ et $y_n \in [0,7]$ » vraie.

$$0 \leqslant y_n \leqslant 7 \Rightarrow 0 \leqslant 7 - y_n \leqslant 7 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{7-y_n} = x_{n+1} \leqslant 7.$$

$$0 \leqslant x_n \leqslant 7 \Rightarrow 7 \leqslant 7 + x_n \leqslant 14 \Rightarrow \sqrt{7} \leqslant \sqrt{7+x_n} = y_{n+1} \leqslant \sqrt{14} \leqslant 7.$$

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. On suppose que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a et b. On utilise les relations entre x_n et y_n. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = b$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \sqrt{7-b} \\ b & = & \sqrt{7+a} \end{array}\right. .$$

On utilise le fait que a et b sont nécessairement dans $[0,7]$. On élève au carré les expressions.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 7-b \\ b^2 & = & 7+a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b^2-a^2 & = & a+b \\ b^2 & = & 7+a \end{array}\right. .$$

L'égalité $b^2 - a^2 = a + b$ se transforme en $(b-a)(b+a) = b + a$. Si $b + a = 0$, comme a et b sont dans $[0,7]$, et s'ils sont opposés, alors $a = b = 0$ et c'est impossible car $b^2 = 7 + a$. Donc il reste $b - a = 1$ c'est-à-dire $b = a + 1$. On remplace dans $b^2 = 7 + a$.

$$(a+1)^2 = 7 + a \Rightarrow a^2 + 1 + 2a = 7 + a \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0.$$

On obtient $a = -3$ ou $a = 2$. Comme $a = -3$ est verboten, il reste $a = 2$.
Enfin $b^2 = 7 + a = 9$ donc $b = 3$.

On pose dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = x_n - 2$ et $t_n = y_n - 3$.

3. $s_{n+1} = \sqrt{7-y_n} - 2 = \dfrac{(\sqrt{7-y_n}-2)(\sqrt{7-y_n}+2)}{\sqrt{7-y_n}+2} = \dfrac{3-y_n}{\sqrt{7-y_n}+2}$.

On a bien : $|s_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_n|$ car $\sqrt{7-y_n} + 2 \geqslant 2$.

De même, $t_{n+1} = \sqrt{7+x_n} - 3 = \dfrac{(\sqrt{7+x_n}-3)(\sqrt{7+x_n}+3)}{\sqrt{7+x_n}+3} = \dfrac{x_n-2}{\sqrt{7+x_n}+3}$.

On a bien : $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$ car $\sqrt{7+x_n} + 3 \geqslant 3$.

4. On en déduit que $|s_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}|s_n|$. Donc $\alpha = \dfrac{1}{6}$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_{n+2}| \leqslant \alpha|s_n|$. On l'applique pour $n = 0$ et $s_0 = 2$. puis pour $n = 2$ puis $n = 4$ jusqu'à $n = 2p$ où p est un entier non nul.

$$|s_{2p}| \leqslant \alpha^p|s_0|.$$

On remarque que $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha^p|s_0| = 0$ car $\alpha = 1/6 \in [0,1[$. Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p} = 0$.

De même, en partant de $n = 1$ puis $n = 3$ jusqu'à $n = 2p+1$, où p est un entier,

$$|s_{2p+1}| \leqslant \alpha^p|s_1|.$$

On remarque toujours que $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha^p|s_0| = 0$ car $\alpha = 1/- \in [0,1[$. Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p+1} = 0$.

En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Par ailleurs l'inégalité $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$ permet d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 3$.

EXERCICE 03

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+\sin^3 x)^{1/4}$ définie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. f est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(1+\sin^3 x\right)\right).$$

La fonction $x \mapsto 1+\sin^3 x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $u \mapsto \ln u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $u \mapsto \exp(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. On peut écrire directement :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = \frac{3}{4}\sin^2 x\cos x(1+\sin^3 x)^{-3/4}.$$

Alors $f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur son domaine de définition et la fonction f est croissante sur ce même domaine de définition.

3. On pose $x = -\frac{\pi}{2} + t$. Écrivons $g(t) = f(x)$.

$$g(t) = f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \left(1+\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)^{1/4}.$$

Or $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = -\cos t$ et donc $\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = -\cos^3 t$. On obtient :

$$g(t) = f\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \left(1-\cos^3 t\right)^{1/4}.$$

Écrivons $h(t) = f'(x)$.

$$h(t) = f'\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{3}{4}\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\left(1+\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)^{-3/4}.$$

Comme $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \sin t$, on obtient :

$$h(t) = f'\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{3}{4}\cos^2 t\sin t\left(1-\cos^3 t\right)^{-3/4}.$$

4. Question pour donner facilement des points.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \sin t = t + o(t^2).$$

Puis : $1-\cos^3 t = 1 - \left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^3 = 1 - \left(1 - 3\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = 3\frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

5. On écrit : $g(t) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(1-\cos^3 t\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)$.

$$\lim_{t\to 0}\ln\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right) = -\infty \Rightarrow \lim_{t\to 0} g(t) = 0.$$

On peut prolonger par continuité f en $-\pi/2$ avec $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

6. On utilise les développements limités de la question **4.**

$$h(t) = \frac{3}{4}\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^2\left(t+o(t^2)\right)\left(3\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^{-3/4}.$$

$$h(t) = \frac{3}{4}\left(1 - 2\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(t + o(t^2)\right)\left(3\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^{-3/4},$$

ce qui donne : $h(t) = \dfrac{3}{4}\left(1 - t^2 + o(t^2)\right)\left(t + o(t^2)\right)\left(3\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^{-3/4}$.

On en déduit un équivalent :

$$h(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{3}{4}t\left(3\frac{t^2}{2}\right)^{-3/4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/4} \times \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = +\infty$.

En conclusion, la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

La demi-tangente à droite au point $x = -\dfrac{\pi}{2}$ au graphe de f est donc verticale.