DEVOIR SURVEILLE 01

TSI2. MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Samedi 20 septembre 2025

Pas de calculettes autorisées

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On pose

$$f : x \mapsto \arcsin(2x-1) + 2\,\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

1. Calculer $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(2x-1) \text{ et de } f_2 : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

   En déduire le domaine de définition I de f.
3. On désire montrer que f est constante sur I.
   Soit $x \in I$, on pose $x = \cos^2\alpha$. Justifier l'existence de α.
   Pourquoi peut-on se restreindre à $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$? On fera ce choix dans la suite.
   Simplifier $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction de α. Conclure.

EXERCICE 02

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $x_0 = y_0 = 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \sqrt{7-y_n} \\ y_{n+1} & = & \sqrt{7+x_n} \end{array} \right. .$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $[0,7]$.
   On utilisera le fait que $\sqrt{14} < 7$.
2. On suppose que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a et b.
   Donner les valeurs de a et de b.
   Indication : on pourra utiliser le fait que a et b sont nécessairement dans $[0,7]$ et on pourra se ramener à une équation du second degré vérifiée par a seul.

T.S.V.P →

On pose dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = x_n - a$ et $t_n = y_n - b$, où a et b sont les réels trouvés plus haut.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = \dfrac{3 - y_n}{\sqrt{7 - y_n} + 2}$. En déduire que $|s_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_n|$.

   Montrer, de même, que : $|t_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{3}|s_n|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_{n+2}| \leqslant \alpha|s_n|$, où α est à déterminer.
5. En déduire la convergence des suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 03

On considère la fonction

$$f : x \mapsto (1 + \sin^3 x)^{1/4}$$

définie pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier le fait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Trouver le signe de f' sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc le sens de variation de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$ sur cet intervalle.
3. On pose $x = -\dfrac{\pi}{2} + t$. Écrire en fonction de $\sin t$ et de $\cos t$:
   $$g(t) = f(x) \text{ et } h(t) = f'(x).$$
4. Écrire les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$ respectivement de $\cos t$, $\sin t$ puis de $1 - \cos^3 t$.
5. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$. En déduire que f peut être prolongé par continuité en $x = -\dfrac{\pi}{2}$.
6. Déterminer un équivalent de $h(t)$ quand $t = 0^+$. En déduire alors $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t)$.