

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 05

Du 13 Octobre 2025 au 17 Octobre 2025

1) Début de l'Algèbre linéaire

Voir colle 04.

2) Suite de l'algèbre linéaire

► **Les familles de vecteurs** : familles libres, génératrices, bases, familles liées, dimension, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Rang d'une famille de vecteurs, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels (donc au moins 2)

► **Applications linéaires** : Lien avec les matrices, définition d'une application linéaire par image d'une base, noyau, image, rang d'une application linéaire, théorème du rang, rang d'une matrice, changement de bases, matrices de passage, conservation de la trace par passage à une matrice semblable, projections et symétries selon une direction.

Warnung : pas encore de formules spécifiques pour les projections ou symétries orthogonales. Si votre projection est orthogonale, ce sera à l'insu de votre plein gré.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Know-how :

Sur les matrices :

- 1) Savoir faire des produits de deux, trois, etc. matrices.
- 2) Savoir résoudre un système linéaire avec des opérations élémentaires sur les lignes.
- 3) Savoir inverser une matrice soit en inversant un système linéaire, soit par Gauß-Jordan, soit avec un polynôme annulateur fourni.
- 4) Savoir calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice, par exemple avec la formule du binôme de Newton ou par récurrence.
- 5) Connaître les propriétés de la transposée d'une matrice carrée.

Sur les espaces vectoriels :

- 1) Connaître les espaces vectoriels usuels avec leurs lois (vecteurs du plan, de l'espace, suites, fonctions, polynômes).
- 2) Savoir montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
- 3) Savoir ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels.
- 4) Connaître la dimension et trouver la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 5) Trouver une base d'un sous-espace vectoriel défini par une équation.
- 6) Savoir montrer qu'une famille finie ou non est libre.
- 7) Extraire une base d'une famille génératrice.
- 8) Savoir user de la formule de Graßmann.
- 9) Savoir montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels (ou au moins une inclusion) en utilisant notamment des bases.
- 9) Montrer que n sous-espaces vectoriels sont en somme directe (dans des cas simples).

Sur les applications linéaires :

- 1) Savoir montrer que le noyau et l'image d'une application linéaire sont des espaces vectoriels.
- 2) Savoir déterminer un noyau et savoir manipuler $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
- 3) Savoir utiliser la loi du rang.
- 4) Savoir utiliser une matrice de passage pour transformer la matrice d'un endomorphisme par changement de base.
- 5) Savoir reconnaître une projection vectorielle avec ses éléments caractéristiques et réciproquement la définir analytiquement ou matriciellement.
- 6) Savoir reconnaître une symétrie vectorielle avec ses éléments caractéristiques et réciproquement la définir analytiquement ou matriciellement.