

Devoir libre 02

2TSI. Mathématiques

A rendre le jeudi 09 octobre 2025

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. On définit dans la suite la matrice : $B = Q \times A \times P$.
Calculer B et expliciter pour tout entier n , la matrice B^n .
3. On veut calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Calculer directement A^n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times B^n \times Q$.
 - (c) En déduire A^n .
 - (d) La matrice A^n est-elle inversible ?

EXERCICE 02

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation

$$(E) : P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ et que peut-on dire de j ?
2. Calculer $1 + j + j^2$ puis comparer j^2 et $\bar{j}$ d'une part et $-1 - j$ et $\bar{j}$ d'autre part.
3. Vérifier que $X^2 + X + 1$ est solution de (E) .
4. Déterminer les polynômes constants solutions de (E) .
5. Soit P une solution non nulle de (E) de degré $n \geq 0$. Quel est son coefficient dominant ?
On justifiera sa réponse.

La suite de l'exercice est en bonus uniquement

6. Soit P un polynôme non constant solution de (E) et α une racine de P .
Montrer alors que α^{2^n} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ est une racine de P .
7. Soit α une racine de P solution de (E) telle que $|\alpha| \neq 0$ et $|\alpha| \neq 1$. Que peut-on dire de P ?
En déduire que si P est une solution non nulle de (E) , les racines de P sont soit nulle, soit de module 1.
8. On pose $\alpha = e^{i\theta}$ une racine de P solution non nulle de (E) . Que peut-on dire de $(1 + \alpha)^2$?
En déduire les trois valeurs possibles des racines non nulles de P . On justifiera sa réponse.
9. **Question pour départager les exaequo.** Soit P une solution non nulle de (E) de la forme

$$P = X^{n_1}(X+1)^{n_2}(X-j)^{n_3}(X-\bar{j})^{n_4},$$

où n_1, n_2, n_3 et n_4 sont quatre entiers naturels éventuellement nuls. En identifiant $P(X^2)$ d'une part et $P(X)P(X-1)$ d'autre part, que peut-on dire des entiers n_1, n_2, n_3 et n_4 ?
En déduire alors toutes les solutions de (E) .

T.S.V.P →

EXERCICE 03

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et on pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie A - Lieux de points

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \frac{1}{3}(-3 + 2i\sqrt{3})$.
Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A , B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral (on pourra mettre $f(c)$ sous forme trigonométrique).
2. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
(On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y .)
3. Écrire le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.
(On posera $z = x + iy$ et on trouvera une égalité utilisant x et (ou) y .)

Partie B - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de ω .
(b) La fonction f est-elle injective? Surjective?
(c) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
2. Dans la suite, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
(a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
(b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
(c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$, et on introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}.$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) est bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n , on a : $u_n \neq -i$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-i$.
- (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
- (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.