

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 07

Du 10 Novembre 2025 au 15 Novembre 2025

1) Revision des probabilités discrètes sur un univers fini

Voir colle 06.

2) Variables aléatoires discrètes X avec $X(\Omega)$ fini

Variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)$ fini. Variable aléatoire $\phi(X)$, où ϕ est une fonction réelle.

Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

Espérance $E(X)$ et variance $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Formule de transfert et formule de Koenig : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Linéarité de l'espérance et formule $V(aX + b) = a^2V(X)$. Loi centrée réduite.

Lois classiques discrètes finies : loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli, loi binomiale, espérance et variance de ces lois.

3) Couples de Variables aléatoires discrètes (X, Y) avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ finis

Loi du couple, lois marginales.

Indépendance de deux variables aléatoires.

Formule $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$, croissance de l'espérance.

Calcul de $E(XY)$ et formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$. On a montré que si X et Y sont indépendants alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et sur un exemple, on a vu que la réciproque est fautive.

4) n -uplet de variables aléatoires discrètes $(X_1, \dots, X_n)$

Définition de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$, indépendance de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Warnung : Éviter les exercices portant sur la détermination de la loi d'une somme de plus de deux variables aléatoires indépendantes $X_1 + \dots + X_n$. Le seul cas survolé est la correspondance entre une somme $X_1 + \dots + X_n$ de n variables indépendantes de Bernoulli de paramètre p et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Par ailleurs, la notion de coefficient de corrélation linéaire n'est plus au programme.

5) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Warnung : L'inégalité de Markov n'est pas à connaître.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Know-how :

Sur les probabilités :

- 1) Utiliser dans un problème de dénombrement le nombre de bijections ou d'applications.
- 2) Savoir calculer $P(\overline{A})$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ avec des formules.
- 3) Savoir calculer une probabilité en faisant le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
- 4) Savoir utiliser la formule de Bayes pour calculer $P_B(A)$ connaissant $P_A(B)$.
- 5) Savoir utiliser la formule des probabilités totales en particulier associé au système complet $(A, \overline{A})$.
- 6) Savoir calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cap B \cap C)$ avec la formule des probabilités composées.
- 7) Savoir différencier deux événements incompatibles et indépendants.

Sur les V.A.R.D :

- 1) Savoir trouver une loi de probabilité dans des cas simples.
- 2) Savoir reconnaître une loi classique.
- 3) Connaître l'espérance et la variance des lois classiques (Bernoulli et Binomiale) et retrouver celle de la loi uniforme (qui dépend de l'intervalle discret choisi).
- 4) Savoir calculer $V(X)$ directement ou avec Koenig.
- 5) Établir le tableau de la loi d'un couple, trouver les lois marginales et calculer les quantités $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$ avec $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- 6) Savoir détecter quand deux ou n v.a.r sont indépendantes.
- 7) Calculer $P(X + Y = k)$ quand X et Y sont indépendants, où X et Y ont des lois connues.
- 8) Faire le lien entre n v.a.r indépendantes de Bernoulli de paramètre p et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- 9) Savoir utiliser Bienaymé-Tchebychev sur des cas simples.