

TSI2. MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

1. $\text{Card}(\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6, i + j \leq 6\}) = 15$ donc $\mathbb{P}(A) = 15/36 = 5/12$ et $\mathbb{P}(B) = 7/12$

2. On cherche le nombre de parties de I qui contiennent i_4 .

— Nombre de parties à 1 élément qui contiennent i_4 : 1

— Nombre de parties à 2 éléments qui contiennent i_4 : $\binom{3}{1} = 3$

— Nombre de parties à 3 éléments qui contiennent i_4 : $\binom{3}{2} = 3$

— Nombre de parties à 4 éléments qui contiennent i_4 : 1

Finalement, il y a 8 informations contenant i_4 .

3. Déterminons, en fonction de k (nombre d'informations de S_A contenant i_4), pour tout $m \in \{2, 3, 4\}$, la probabilité que sachant que S_A a été choisie par les dés, le joueur J_m obtienne de la source S_A une information contenant l'indice i_4 . Il y a 8 informations contenant i_4 et que S_A en contient k

On obtient : $\frac{\text{nb d'informations de } S_A \text{ contenant } i_4}{\text{nb d'informations de } S_A} = \frac{k}{8}$.

De même, calculons la probabilité que sachant que S_B a été choisie par les dés, le joueur J_m obtienne de la source S_B une information contenant l'indice i_4 .

On obtient : $\frac{\text{nb d'informations de } S_B \text{ contenant } i_4}{\text{nb d'informations de } S_B} = \frac{8-k}{8}$.

4. Notons C_i : « le joueur J_i obtient de la source S_A une information contenant i_4 » et C'_i : « le joueur J_i obtient de la source S_B une information contenant i_4 ».

On note E l'événement : « l'équipe obtient exactement deux informations contenant l'indice i_4 ».

Si la source choisie est S_A , on est dans les cas :

$$(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}) \cup (C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3)$$

Par incompatibilité des événements formant l'union, puis par indépendance des J_i :

$$\mathbb{P}_A(E) = 3 \left(\frac{k}{8} \right)^2 \left(\frac{8-k}{8} \right).$$

De même,

$$\mathbb{P}_B(E) = 3 \left(\frac{8-k}{8} \right)^2 \left(\frac{k}{8} \right).$$

Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_A(E)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(E)\mathbb{P}(B)$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \frac{5}{12} 3 \left(\frac{k}{8} \right)^2 \left(\frac{8-k}{8} \right) + \frac{7}{12} 3 \left(\frac{8-k}{8} \right)^2 \left(\frac{k}{8} \right) \\ &= \frac{k(8-k)(5k+7(8-k))}{8^3 \times 4} \\ &= \frac{k(8-k)(28-k)}{2 \times 8^3} \end{aligned}$$

5. Avec le même raisonnement,

$$P_A(E') = \left(\frac{k}{8} \right)^3 \text{ et } P_B(E') = \left(\frac{8-k}{8} \right)^3.$$

En notant E' l'événement cherché :

$$\mathbb{P}(E') = \frac{5}{12} \left(\frac{k}{8} \right)^3 + \frac{7}{12} \left(\frac{8-k}{8} \right)^3$$

6. On cherche $\mathbb{P}_{E'}(A)$. Alors, avec la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{E'}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(E')}{\mathbb{P}(E')} = \frac{\frac{5}{12} \left(\frac{k}{8}\right)^3}{\frac{5}{12} \left(\frac{k}{8}\right)^3 + \frac{7}{12} \left(\frac{8-k}{8}\right)^3} = \frac{5k^3}{5k^3 + 7(8-k)^3}.$$

EXERCICE 02

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

D'une part : $A^n = A^0 = I$

D'autre part : $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour une valeur de n fixée, c'est à dire : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 3 \times 3^n + 0 & 3n 3^{n-1} + 3^n \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 3 \times 3^n \end{pmatrix},$$

$$\text{et c'est bien } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{2-a} \quad AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 0 + 3^n \\ 0 + 3b_n + 3^n \\ 0 + 0 + 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2-b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

D'une part : $A^n X_0 = A^0 X_0 = I X_0 = X_0$

D'autre part : $X_n = X_0$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour une valeur de n fixée, c'est à dire : $X_n = A^n X_0$.

Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire : $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

$$\mathbf{2-c} \quad X_n = AX_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + (3^n - 2^n) \\ n 3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n 3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n 3^{n-1}$.

$$\mathbf{3-a} \quad PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 1+0-1 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = I$$

Conclusion : $PQ = I$, donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{3-b} \quad PMP^{-1} &= PMQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0+0-1 & 0+0+0 & 0+0-1 \\ 0-1+0 & 0+3+0 & 0+1+0 \\ -4+0+1 & 0+0+0 & 2+0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ -1+0+1 & 0+3+0 & 1+0+0 \\ 3+0-3 & 0+0+0 & 3+0+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $PMP^{-1} = A$.

3-c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

D'une part : $M^n = M^0 = I$.

D'autre part $P^{-1}A^nP = P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour une valeur de n fixée, c'est à dire : $M^n = P^{-1}A^nP$.

Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire : $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$.

Tout d'abord, d'après la question précédente; $A = PMP^{-1}$, soit en multipliant par P à droite et P^{-1} à gauche : $M = P^{-1}AP$.

$$M^{n+1} = MM^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}A^nP) = P^{-1}A(PP^{-1})A^nP = P^{-1}AA^nP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P^{-1}A^nP$.

$$\begin{aligned}
M^n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a : $M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$.

4-a On sait que $b_{k+1} = 3b_k + 3^k$, c'est à dire $b_{k+1} = 2b_k + b_k + 3^k$, d'où $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

Conclusion : pour tout entier naturel k , on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

4-b On reconnait la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1 :

$$\text{D'où pour tout entier naturel } n, \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1).$$

4-c On peut encore faire une récurrence... ou alors : $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{k+1} - \sum_{k=0}^n b_k$.

La première somme contient $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ et b_{n+1}

La deuxième somme contient $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ et b_n

En faisant la soustraction, il reste b_{n+1} dans la première somme et b_0 dans la deuxième.

D'où $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}$ puisque $b_0 = 0$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a : $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
4\text{-d } \sum_{k=0}^n k 3^{k-1} &= \sum_{k=0}^n b_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2b_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k - 3^k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n b_{k+1} - b_k - \sum_{k=0}^n 3^k \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(b_{n+1} - \frac{1}{3}(3^{n+1} - 1) \right) = \frac{1}{2} \left((n+1)3^n - \frac{1}{3}(3^{n+1} - 1) \right) = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n k 3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$.

EXERCICE 03

Partie I

1. Donnons une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont des complexes scalaires arbitraires. Les quatre matrices explicitées forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Et sa dimension est 4.

De même, donnons une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on pose $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ et $d = d_1 + id_2$, où tous les a_i, b_i, c_i et d_i sont réels.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égal à :

$$\begin{aligned}
&a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Toutes ces matrices sont libres et forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. qui est de dimension 8.

2. Tout quaternion $q = M(a, b)$ s'écrit de façon unique $q = xE + yI + zJ + tK$, avec x, y, z, t réels. En effet, en posant $a = x + iy$ et $b = z + it$,

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} x + iy & -z - it \\ z - it & x - iy \end{pmatrix} = xE + yI + zJ + tK.$$

On peut en déduire que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que (E, I, J, K) est une famille génératrice de $\mathcal{H}$.

Comme $xE + yI + zJ + tK = 0 \Rightarrow M(a, b) = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$, la famille (E, I, J, K) est libre donc est une base de $\mathcal{H}$. Et donc $\dim \mathcal{H} = 4$.

3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, écrivons le produit matriciel $M(a, b)M(a', b')$ sous la forme $M(c, d)$, où on exprimera les complexes c et d en fonction des complexes a, b, a' et b' et de leurs conjugués.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\bar{b}' & -ab' - b\bar{a}' \\ \bar{b}a' + \bar{a}\bar{b}' & -b'\bar{b} + \bar{a}\bar{a}' \end{pmatrix}.$$

On pose $c = aa' - b\bar{b}'$ et $d = ab' + b\bar{a}'$ et on a bien le résultat.

Ainsi, on peut dire que l'ensemble $\mathcal{H}$ des quaternions est stable par la multiplication matricielle.

4. Calculons les produits deux à deux des matrices E, I, J et K .

$\nearrow$	E	J	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

La multiplication dans $\mathcal{H}$ n'est pas commutative car $IJ = K$ et $JI = -K$ par exemple.

5. Comme
$$\begin{vmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2, \text{Det}(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

6. On définit le **commutant de $\mathcal{H}$** : $\{q \in \mathcal{H}, \forall r \in \mathcal{H}, qr = rq\}$.

En suivant l'indication, on pose $q = xE + yI + zJ + tK$ et on applique avec $r = I$, $r = J$ et $r = K$. En effet, si $qr = rq$ pour tout $r \in \mathcal{H}$, c'est vrai en particulier pour $r = I$, $r = J$ et $r = K$.

Ainsi $qI = xI - yE - zK + tJ$ et $Iq = xI - yE + zK - tJ$ en utilisant le tableau ci-haut. Alors $z = t = 0$. De même, $qJ = xJ + yK - zE - tI$ et $Jq = xJ - yK - zE + tI$ et donc $y = t = 0$.

Il reste $q = xE$ et réciproquement tout quaternion de ce type commute avec tous les autres.

En conclusion, le commutant de $\mathcal{H}$ est $\{xE, x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(E)$.

Partie II

Si $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathcal{H}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on définit le **quaternion conjugué** de q , noté q^* par la formule :

$$q^* = xE - yI - zJ - tK.$$

Par analogie avec les complexes, la partie réelle de q , notée $\text{Re}(q)$ est xE et la partie imaginaire de q , notée $\text{Im}(q)$ est $yI + zJ + tK$. Enfin, on pose $N(q) = q.q^*$

7. Soit $q \in \mathcal{H}$, on pose $a = x + iy$ et $b = z + it$.

$$q = M(x + iy, z + it) = \begin{pmatrix} x + iy & -z - it \\ z - it & x - iy \end{pmatrix} \text{ et } q^* = M(x - iy, -z - it) = \begin{pmatrix} x - iy & z + it \\ -z + it & -x - iy \end{pmatrix}.$$

De plus, $\bar{q} = \begin{pmatrix} x - iy & -z + it \\ z + it & x + iy \end{pmatrix}$ et $\bar{q}^T = \begin{pmatrix} x - iy & z + it \\ -z + it & x + iy \end{pmatrix} = q^*$.

8. On va en déduire que pour tous quaternions q, r , on a : $(qr)^* = r^*q^*$

$$(qr)^* = (\bar{qr})^T = (\bar{q}\bar{r})^T = \bar{r}^T \bar{q}^T = r^*q^*.$$

9. Pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $N(q) = qq^*$ est :

$$(xE - yI + zJ + tK)(xE - yI - zJ - tK) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E,$$

en développant et en utilisant encore le tableau.

On peut en déduire l'expression $q^{-1} = \frac{q^*}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$.

10. Montrons que, pour tous quaternions q, r , on a : $N(qr) = N(q)N(r)$.

Posons $q = xE + yI + zJ + tK$ et $r = x'E + y'I + z'J + t'K$.

$$N(qr) = qr(qr)^* = qrr^*q^* = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2)E.$$

$$N(q)N(r) = qq^*rr^* = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2)E^2.$$

Comme $E^2 = E$, on a bien l'égalité.