CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 09

Du 24 Novembre 2025 au 29 Novembre 2025

Réduction des endomorphismes

- Notion de valeur propre et de vecteur propre. Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Notion de polynôme caractéristique. On note $\chi_u(X) = \mathsf{Det}\,(X\,id - u)$, si $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. χ_u est de degré n et son coefficient dominant est 1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- u est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda \in sp(u)} \mathsf{dim}\, E_\lambda = \mathsf{dim}\, E$.

3) Trigonalisation (avec aide)

Dans le cas où le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire donc dans le cas où u est trigonalisable dans $\mathbb{K}$) et si l'on note λ_i ses racines (éléments de $\mathbb{K}$) d'ordre de multiplicité α_i, pour i variant de 1 à p, alors :

$$\boxed{\mathsf{Det}\, u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i} \text{ et } \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i.}$$

❑ **MÃ©thode 0.1.—** Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, définie par la donnée de u_0 et de u_1, et la relation de récurrence (R) :

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$, (a, b) étant deux éléments fixés de $\mathbb{K}$.

1) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, alors la relation (R) devient $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on aboutit à $U_n = A^n U_0$.

3) On applique la méthode du calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

Compétences à acquérir :

Sur la réduction des endomorphismes :

1) lien entre le rang d'une matrice et la dimension de E_0.
2) Savoir calculer χ_u en mettant des termes du type $X - a$ en facteur dans le déterminant.
3) Montrer quand une matrice n'est pas diagonalisable et en particulier quand la matrice n'a qu'une valeur propre.
4) Connaître les cas du programme où on peut affirmer que A est diagonalisable.
5) Calculer A^n en utilisant la diagonalisation ou la trigonalisation.
6) Trigonaliser une matrice 3×3 si l'on connait deux vecteurs propres indépendants.
7) Résoudre une récurrence linéaire du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ou $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ en utilisant la méthode plus haut.