

Reduction

■ Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Exercice 01

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie tel que $f^3 - 5f^2 + 6f = 0$.
Déterminer les valeurs propres possibles de f .

Starter

On posera $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Exercice 02

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en soit un vecteur propre associé à la valeur propre -2 .

■ Conditions de diagonalisation

Exercice 03

Réduire, lorsque cela est possible, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 04

Réduire, lorsque cela est possible, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 05

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A . En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de A .
2. Donner les éléments propres de A . A est-elle diagonalisable ?

Starter

1. Comparer les colonnes.

Exercice 06

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Starter

On commencera par mettre $\chi_A(X)$ sous forme factorisée.

Exercice 07

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $f(M) = M^T$.

Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Déterminer alors $\text{Det}(f)$ et $\text{Tr}(f)$.

Exercice 08

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme (en particulier que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.)
2. Déterminer sa matrice A dans sa base canonique et réduire A .
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f et résoudre $f(P) = 1 + X^2$ en utilisant cette base.

■ Trigonalisation**Exercice 09**

Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable mais non diagonalisable puis donner une base qui trigonalise A .

Starter

Au programme, il est dit que c'est bien de donner une indication. Il faut prendre une base dont les deux premiers vecteurs sont une base de $E_1(A)$ et le dernier par exemple $(0, 0, 1)$.

Exercice 10

On considère $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 9I_3)^3$. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A et $g = f - 9\text{Id}_E$, montrer que $g^2 \neq 0$. Si $\vec{u}_3$ est un vecteur tel que $g^2(\vec{u}_3) \neq 0$, on pose $\vec{u}_2 = g(\vec{u}_3)$ et $\vec{u}_1 = g(\vec{u}_2)$. Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de la matrice de f dans cette base ?

■ Application de la diagonalisation pour calculer des puissances successives**Exercice 11**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Starter

2. Ici deux méthodes, on peut par exemple considérer f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) , puis déterminer une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans laquelle la matrice de f est A . On peut s'appuyer sur le fait que u_1 et u_2 sont forcément dans $E_1(A)$. Une autre méthode est de poser une matrice P (de passage) telle que ses deux premières colonnes soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ précédents et la troisième colonne de la forme (a, b, c) . Enfin, on a : $AP = PB$. À vous de continuer.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 3$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}.$$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Réduire A et en déduire X_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A . On appelle D la matrice diagonale obtenue et P telle que : $D = P^{-1}AP$.
2. Déterminer $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 = D$. En déduire $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.

Starter

2. Si $Y^2 = D$ alors Y et D commutent !

Exercice 14

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 5$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} &= 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A . On appelle P la matrice de passage et D une matrice diagonale semblable à A .
3. On pose $Y_n = P^{-1}X_n$. Écrire une relation entre Y_{n+1} , D et Y_n .
4. Déterminer Y_0 . En déduire Y_n en fonction de Y_0 .
5. Déterminer alors u_n , v_n et w_n en fonction de n .