DM Maths TSi 2

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie par $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) Donner la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul).
   (c) Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?
   (d) Calculer le polynôme caractéristique de S.
   (e) Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2, et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (f) On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1. Donner une base (u_1, u_2) de E_1, telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1.
   (g) On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2. Donner une base (u_3, u_4) de E_2, telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
   (h) Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_1^{-1}.
2. L'objectif de cette question est d'étudier p.
   (a) Donner la matrice P de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
   (c) Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (d) Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.
   (e) Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_2^{-1}.
3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.
   (a) Donner la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1}.

Exercice 2

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.

   (b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}' t = \mathrm{sh}\, t$ et $\mathrm{sh}' t = \mathrm{ch}\, t$.

   (c) Dériver la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\mathrm{ch}\, t)^2 - (\mathrm{sh}\, t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\mathrm{ch}\, t)^2$ et $(\mathrm{sh}\, t)^2$.

2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.

3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\mathrm{sh}\, t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.

   (b) On pose $z = \mathrm{e}^{\alpha}$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

   (c) En déduire la valeur exacte de α.

   (d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

4. Montrer que $\mathrm{ch}\, \alpha = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\, t)^{2n}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_0 = \alpha$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0, \alpha]$, *on a* $0 \leqslant \mathrm{sh}\, t \leqslant 1$). En déduire qu'elle est convergente.

3. (a) En remarquant que $(\mathrm{sh}\, t)^{2n+2} = (\mathrm{sh}\, t)^{2n+1}\, \mathrm{sh}\, t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \mathrm{ch}\, \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.

   (c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?