

Solution D7

01

Exercice 1

1) (a) $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $S^T = S$ et $S \in M_4(\mathbb{R})$
une matrice symétrique réelle
est diagonalisable.

(c) $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \Rightarrow$ Symétrique vectorielle

On peut aussi en déduire que si λ est une valeur propre de S alors $\lambda^2 = 1$.

(d) $\chi_S(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 & 0 \\ t-1 & t & 0 & -1 \\ t-1 & 0 & t & 0 \\ t-1 & -1 & 0 & t \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 1 & -1 & 0 & t \end{vmatrix}$

$= (t-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 + C_2 + C_3 + C_1} (t-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ -1 & 1 & t & 0 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t^2-1)(t^2-1) = (t-1)^2(t+1)^2$
 $L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } i \in \{2, 3, 4\}$

(e) $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ les ordres de multiplicité sont 2 pour les 2 V.F.

(f) $S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_2 \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

On peut poser $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a: $E_1 = \left\{ x_1 U_1 + x_2 U_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(g) $S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = x_2 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

On peut poser $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $E_2 = \left\{ x_1 U_3 + x_2 U_4, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(h) $O_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S = \Phi_1 O_1 \Phi_1^{-1}$

2) (a) $P = \frac{1}{2}(I_4 - S) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} = \underline{P = P^2}$

On en déduit que f est une projection vectorielle.

(c) P_{U_1} peut se calculer matriciellement. On peut aussi partir de $D(U_1) = -U_1$

$$\Rightarrow f(U_1) = \frac{1}{2}(U_1 - D(U_1)) = \frac{1}{2}(U_1 + U_1) = U_1$$

Et même $f(U_2) = U_2$. Puis $f(U_3) = \frac{1}{2}(U_3 - D(U_3)) = 0$ et $f(U_4) = 0$.

Donc $\text{Im}(f) = E_1$ et $\text{Ker}(f) = E_2$.

(d) On sait que $S = \Phi_1 D_1 \Phi_1^{-1}$ et que $P = \frac{1}{2}(I_4 - S)$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}(\Phi_1 I_4 \Phi_1^{-1} - \Phi_1 D_1 \Phi_1^{-1}) = \frac{1}{2} \Phi_1 (I_4 - D_1) \Phi_1^{-1} = \Phi_1 \left(\frac{1}{2}(I_4 - D_1) \right) \Phi_1^{-1}$$

On prend $D_2 = \frac{1}{2}(I_4 - D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ et $\Phi_1 = \Phi_2$

$$3) (a) F = 3S + 4P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) On écrit $F = 3\Phi_1 D_1 \Phi_1^{-1} + 4\Phi_1 D_2 \Phi_1^{-1} = \Phi_1 (3D_1 + 4D_2) \Phi_1^{-1}$

On pose $D_3 = 3D_1 + 4D_2 = \text{diag}(-3, -3, 3, 3) + \text{diag}(4, 4, 0, 0)$

$= \text{diag}(1, 1, 3, 3)$
et $\Phi_3 = \Phi_1$ comme d'habitude.

Exercice 02 | Partie A | 1. (a) $\text{ch}(-t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) = \text{ch}(t) \Rightarrow$ ch paire

$\text{sh}(-t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^t) = -\text{sh}(t) \Rightarrow$ sh impaire

(b) ch et sh sont des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles qui sont dérivables donc ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{ch}'(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \text{sh}(t) \text{ et } \text{sh}'(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \text{ch}(t).$$

$$(c) f'(t) = 2\text{ch}(t)\text{ch}'(t) - 2\text{sh}(t)\text{sh}'(t) = 2\text{ch}(t)\text{sh}(t) - 2\text{sh}(t)\text{ch}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K. \quad f(0) = \text{ch}^2(0) - \text{sh}^2(0) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1} \quad (\text{relation de la trigonométrie hyperbolique})$$

Remarque $t \mapsto (\text{ch}(t), \text{sh}(t))$ paramétrise en fct de t une trajectoire hyperbolique

2) Pour faire les tableaux, on remarque que $\text{ch}(t) \sim \frac{1}{2}e^t$ et $\text{sh}(t) \sim \frac{1}{2}e^t$. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ch}(t) = +\infty$ et idem pour $\text{sh}(t)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch(t)$	$+\infty$	1	$+\infty$
$sh(t)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3) (a) sh est une fonction (03)
bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc
l'équation $sh(t) = 1$ a une et
une seule solution α .

(b) On sait que $sh(\alpha) = 1 \Leftrightarrow e^\alpha - e^{-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{2\alpha} - 1 = 2e^\alpha$
On a bien le résultat demandé $\Leftrightarrow e^{2\alpha} - 2e^\alpha - 1 = 0$.

On veut $z^2 - 2z - 1 = 0$. $\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Comme $e^\alpha > 0$, la seule possible est $e^\alpha = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})}$

(c) C'est fait. (d) On sait que $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ (car $\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq 3 \Leftrightarrow 8 \leq 9$)
et donc $1 + \sqrt{2} \leq \frac{5}{2}$ puis $\frac{5}{2} \leq e$ (car $e \approx 2.718$)

$\Rightarrow \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \ln\left(\frac{5}{2}\right) \leq \ln(e) = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \leq 1}$

4) On a $ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha) = 1 \Rightarrow ch^2(\alpha) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow ch(\alpha) = \pm \sqrt{2}$
et comme $ch(\alpha) > 0 \Rightarrow \boxed{ch(\alpha) = \sqrt{2}}$

Partie B 1) $I_0 = \int_0^\alpha (sh t)^0 dt = \int_0^\alpha dt = \alpha$

2) Parlons de $\forall t \in [0, \alpha]$, $0 \leq sh(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq sh^2(t) \leq 1$
Puis $(sh t)^{2(n+1)} - (sh t)^{2n} = (sh t)^{2n} (sh^2 t - 1) \leq 0$ pour $t \in [0, \alpha]$
donc $I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow (I_n) \downarrow$. Par ailleurs $(sh t)^{2n} > 0$
 $\forall t \in]0, \alpha]$

$\Rightarrow I_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Comme (I_n) est décroissante et minorée, elle converge vers
une valeur que l'on a envie de connaître mais il est trop tôt

3) (a) On remarque tout d'abord que $(sh t)^{2n+2} = (sh t)^{2n+1} sh t$
(et on remarque aussi que c'est similaire à l'intégrale de John Wallis)

$$I_{n+1} = \int_0^\alpha (sh t)^{2n+2} dt = \int_0^\alpha \underbrace{(sh t)^{2n+1}}_{\text{dérivation}} \underbrace{sh(t)}_{\text{intégration}} dt$$

$$= - \int_0^\alpha (2n+1) (sh t)^{2n} ch(t) ch(t) dt + \left[(sh t)^{2n+1} ch(t) \right]_0^\alpha$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = -(2n+1) \int_0^a (xht)^{2n} h^2(t) dt + (xha)^{2n+1} h(a) - 0$$

(04)

$$\Rightarrow I_{n+1} = -(2n+1) \int_0^a (xht)^{2n} (1+xh^2(t)) dt + h(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} = -(2n+1) (I_n + I_{n+1}) + h(a)} \quad \text{c'est la relation demandée.}$$

(b) On a alors: $(1+2n+1)I_{n+1} = -(2n+1)I_n + h(a)$

$$\Rightarrow (2n+2)I_{n+1} = -(2n+1)I_n + \sqrt{2} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n \quad (1)$$

(c) Supposons $I_n \rightarrow l$ alors comme $\frac{\sqrt{2}}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,

l'égalité (1) donne: $\lim(I_{n+1}) = l = 0 - \lim(I_n) = 0 - l$

$$\Rightarrow 2l = 0 \Rightarrow \boxed{l = 0}$$