CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

$\boxed{\text{Colle 12}}$

Du 15 décembre 2025 au 19 décembre 2025

1) <u>Intégrales généralisées</u> Révision colle 11.

2) <u>Séries numériques</u>

► Série associée à une suite. On suppose que $u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Série convergente. Série divergente.
Une série de nombres complexes $\sum z_n$ est convergente dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, la série $\sum \mathfrak{Re}(z_n)$ et la série $\sum \mathfrak{Im}(z_n)$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$. Reste R_n d'une série convergente. Si la série $\sum u_n$ converge alors R_n tend vers 0. Si la série $\sum u_n$ converge alors u_n tend vers 0. La réciproque est fausse.

►**Séries à termes positifs**. Convergence par majoration de la suite des sommes partielles.

►**Séries géométriques et séries de Riemann.** Étude de la nature de ces séries. Comparaison par majoration, minoration, par domination et par équivalence.

►**Règle de d'Alembert**.
Comparaison série-intégrale (donc on peut ici jouer sur les deux parties du programme de colles)

► **Séries alternées**. Critère spécial des séries alternées. Majoration de $|R_n|$ par $|u_{n+1}|$.

► **Séries absolument convergentes**. Toute série absolument convergente est convergente. Série géométrique $\sum z^n$, où $z \in \mathbb{C}$. Série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ absolument convergente.
Warnung : la formule de James Stirling n'est pas à connaître (bien que cela puisse être admis lors d'un exercice)

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice) :

<u>Know-how</u> :

Sur l'intégration sur un intervalle quelconque :

1) montrer la convergence ou divergence dans des cas simples (I borné ou non).
2) Savoir faire une IPP pour une intégrale généralisée en se ramenant à une IPP sur un segment.
3) Calculer une intégrale généralisée avec un changement de variable donné par le colleur (si changement non trivial).
4) Savoir montrer qu'une fonction est intégrable ou non sur un intervalle I.

Sur les séries numériques :

1) Savoir démontrer la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs en utilisant une des pistes au programme (divergence grossière, limite de S_n, limite de R_n, majoration, minoration, domination, équivalence, d'Alembert, comparaison à une intégrale, DL en $1/n$.
2) Savoir quand une série géométrique ou une série de Riemann converge ou diverge.
3) Calculer ou trouver un équivalent de R_n dans des cas simples et guidés.
4) Ne pas confondre convergence et absolue convergence d'une série.
5) Montrer la convergence d'une série alternée par l'utilisation du critère spécial des séries alternées et majoration de $|R_n|$.