DEVOIR SURVEILLE 03

TSI2. MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 13 decembre 2025

Pas de calculettes autorisées

Les différents exercices sont indépendants. Seule **Q 31** *de* **l'exercice 04** *a un lien avec* **l'exercice 03**.

EXERCICE 01

Extrait du sujet CCS filière TSI Math2 2019 : matrices compagnons

Si $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$, on note la matrice $C(a_1, ..., a_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A. Étude d'un premier exemple

Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = C(-2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q 1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Q 2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

B. Étude d'un second exemple

Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $B = C(1, -3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 3. Calculer le polynôme caractéristique de B et une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Q 4. Montrer que B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais qu'elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère le vecteur colonne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Q 5. Déterminer un vecteur colonne $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_2 = v_1 + v_2$.

Q 6. Déterminer un vecteur colonne $v_3 = \begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_3 = v_2 + v_3$.

Q 7. En déduire une matrice R inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = RTR^{-1}$, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C. On revient au cas général, où $p \in \mathbb{N}^\star$ On pose $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 8. Montrer par récurrence sur p que le polynôme caractéristique de C est

$$\chi_C(t) = t^p - a_p t^{p-1} - ... - a_2 t - a_1.$$

Q 9. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors le rang de $C - \lambda I_p$ est supérieur ou égal à $p - 1$. En déduire que les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

Q 10. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples.

Q 11. On considère un polynôme unitaire P de $\mathbb{R}[X]$ de degré p. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $P = \chi_C$, où $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 12. Étant donné un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que ce polynôme soit le polynôme caractéristique d'une matrice.

T.S.V.P $\rightarrow$

EXERCICE 02

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2019 : valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\, dt$.

Q 13. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\, dt$ converge. En déduire que I existe.

Q 14. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
Indication : on étudiera $x \mapsto x - \ln(1+x)$.

Q 15. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.

Montrer de même que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, $e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définis par :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt,\ I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt,\ v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Q 16. Justifier la convergence des intégrales généralisées $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Q 17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leqslant I_n$.

Q 18. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leqslant I_n \leqslant v_n$.

Dans la suite, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$. On admet que $a_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Q 19. À l'aide du changement de variable $t = \phi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

Q 20. À l'aide du changement de variable $t = \phi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan x$, montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}$.
Indication : on rappelle que $\cos^2 t = (1 + \tan^2 t)^{-1}$.

Q 21. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\, dt$.

EXERCICE 03

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2023 : étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x^a}$, ***où*** $a > 0$.

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_a(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x^a}$.

On note I_a et J_a les intégrales généralisées $I_a = \displaystyle\int_0^1 f_a(t)\, dt$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\, dt$.

Q 22. Montrer que I_a converge pour $0 < a < 2$. Qu'en est-il pour $a \geqslant 2$?

Q 23. Soit $a > 1$, montrer que f_a est intégrable sur $[1, +\infty[$. Que peut-on dire de J_a ?

Q 24. Soit $X > 1$, montrer que : $\displaystyle\int_1^X f_a(t)\, dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}\, dt$.

En déduire la nature de J_a pour $a \in]0, 1]$.

Q 25. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\, dt$ est-elle convergente ?

EXERCICE 04

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2023 : étude de la convergence et calcul de la somme d'une série alternée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\, dx \text{ et } u_n = (-1)^n v_n.$$

Q 26. Justifier l'existence de u_0.

Q 27. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

En utilisant une majoration de $|\sin|$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Q 28. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. Quel est le théorème utilisé ? On note l sa limite.

Q 29. Soit $N \in \mathbb{N}$, on note S_N la somme partielle au rang N de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, c'est-à-dire $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$.

Et on note le reste partiel d'ordre n, $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Quel résultat du cours permet d'écrire l'inégalité $|R_N| \leqslant v_{N+1}$?

Montrer alors que pour tout N, $|S_N - l| \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{N+1}\right)$.

Développer une méthode pour calculer une valeur approchée de l à *epsilon* près en supposant connues les valeurs de la suite (u_n). (On ne demande pas de résultat numérique.)

Q 30. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt$.

Q 31. Exprimer la limite l sous la forme d'une des intégrales généralisées étudiées à l'exercice 03.