Devoir libre 05

2TSI. Mathématiques

A rendre le lundi 12 janvier 2026

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On se propose d'étudier pour tout réel x l'intégrale suivante :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\, \mathrm{d}t.$$

1°) *Calcul de l'intégrale $J(0)$*

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Justifier alors la convergence et préciser la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2°) *Une inégalité préliminaire*

a) Etablir pour tout réel $u \geq 0$ la double inégalité : $-u \leq \sin(u) \leq u$.
En déduire qu'on a : $\forall\, u \in \mathbb{R},\ |\sin(u)| \leq |u|$.

b) Pour tout réel u, établir que : $\left|e^{iu} - 1\right| = 2\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|$, puis en déduire que : $\left|e^{iu} - 1\right| \leq |u|$.

c) Pour tout réel x, calculer l'intégrale : $i\int_0^x \left(e^{iu} - 1\right) \mathrm{d}u$.

d) En déduire qu'on a pour tout réel x l'inégalité suivante (on commencera par le cas $x \geq 0$) :

$$\left|e^{ix} - 1 - ix\right| \leq \frac{x^2}{2}.$$

3°) *Dérivabilité de la fonction J*

a) Pour tout réel x, justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$.

b) En exploitant la question 2, établir l'inégalité suivante pour tous réels x, t, h :

$$\left|J(x+h) - J(x) - i\pi h \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi^2 h^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\pi t^2}\, \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que la fonction J est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a :

$$J'(x) = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t}\, \mathrm{d}t.$$

4°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

a) A l'aide d'une intégration par parties de $J'(x)$, établir la relation suivante pour tout réel x :

$$J'(x) + \frac{\pi x}{2} J(x) = 0.$$

b) En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{\frac{\pi x^2}{4}} J(x)$, puis expliciter $J(x)$ sans symbole intégral.

c) Pour tout réel x, étudier enfin l'existence et la valeur de l'intégrale :

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(\pi x t)\, \mathrm{d}t.$$

EXERCICE 02

On étudie (sous réserve de convergence) la série entière suivante de la variable réelle x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

où $\binom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial "n parmi $2n$".

1°) *Algorithme de calcul des coefficients* $\binom{2n}{n}$ *de la série entière définissant f*

a) Déterminer explicitement les coefficients $\binom{2n}{n}$ pour $0 \le n \le 5$ et préciser $\sum_{n=0}^{n=5} \binom{2n}{n} x^n$.

b) Déterminer pour tout entier naturel n le nombre rationnel r_n défini par l'égalité suivante :

$$\binom{2n+2}{n+1} = r_n \binom{2n}{n}.$$

c) En exploitant la relation ainsi obtenue, écrire un algorithme (en langage Python) permettant le calcul successif des coefficients $c_n = \binom{2n}{n}$ pour $0 \le n \le N$ où N est donné dans $\mathbb{N}$.

Que dire du nombre d'opérations effectuées pour obtenir ces coefficients?

2°) *Domaine de convergence de la série entière*

a) La série entière étudiée est-elle convergente pour $x = 1$? pour $x = -1$? Que vaut $f(0)$?

b) Vérifier que : $\lim_{n\to+\infty} r_n = 4$.

c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière étudiée.

3°) *Sommation de la série entière définissant la fonction f*

a) La fonction f est-elle dérivable sur $]-R, R[$?

Expliciter alors $f'(x)$ sous forme d'une série entière.

b) Exprimer $(1 - 4x) f'(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

c) En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-4x}\, f(x)$, puis expliciter $f(x)$ sans symbole $\sum$.

d) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ pour $x \in]-R, R[$.

4°) *Estimation des coefficients* $\binom{2n}{n}$ *de la série entière*

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$ et : $v_n = \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} \binom{2n}{n}$.

a) Pour tout entier $n \ge 1$, montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b) Calculer u_1 et en déduire qu'on a pour $n \ge 1$: $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

c) Etudier le sens de variation de la suite (v_n).

Calculer v_0, puis, pour tout entier $n \ge 1$, comparer v_n et v_0.

Quelle inégalité en déduit-on pour $\binom{2n}{n}$?

d) En déduire l'encadrement suivant pour tout entier $n \ge 1$:

$$\frac{1}{2} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \le \binom{2n}{n} \le \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

Quelle est la nature de la série entière pour la valeur $x = 1/4$?