DEVOIR SURVEILLE 03

TSI2. MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

A. Étude d'un premier exemple

Dans cette question, on suppose $p=3$ et $A=C(-2,1,2)=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Q 1. $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X&0&2\\-1&X&-1\\0&-1&X-2\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=}\begin{vmatrix}X-1&X-1&X-1\\-1&X&-1\\0&-1&X-2\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&X&-1\\0&-1&X-2\end{vmatrix}$

$\underset{C2\leftarrow C2-C_1,C_3\leftarrow C_3-C_1}{=}(X-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&X+1&-1\\0&0&X-2\end{vmatrix}=(X-1)(X+1)(X-2)$; donc le polynôme caractéristique de A est : $\boxed{\chi_A(X)=(X+1)(X-1)(X-2)}$

Q 2. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc, par théorème,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } D=\ \mathrm{diag}\big(-1,1,2\big)}$$

Déterminons les sous-espaces propres de A et donc une base de vecteurs propres :

$\mathcal{E}_{-1}=\mathsf{Ker}\,\big(A+I_3\big)=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&-1&-1\\0&-1&-3\end{pmatrix}=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&-3\\0&-1&-3\end{pmatrix}=\mathsf{Vect}\ (2{-}31)$

$\mathcal{E}_{1}=\mathsf{Ker}\,\big(A-I_3\big)=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\mathsf{Vect}\ ({-}2{-}11)$

$\mathcal{E}_{2}=\mathsf{Ker}\,\big(A-2I_3\big)=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\mathsf{Vect}\ ({-}101)$

On aura donc $A=PDP^{-1}=P\ \mathrm{diag}\big(-1,1,2\big)\ P^{-1}$; avec $\boxed{P=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-3&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}}$

B. Étude d'un second exemple

Dans cette question, on suppose $p=3$ et $B=C(1,-3,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{pmatrix}$.

Q 3. $\chi_B(X)=\begin{vmatrix}X&0&-1\\-1&X&3\\0&-1&X-3\end{vmatrix}$; un calcul similaire à **Q1.** donne $\boxed{\chi_B(X)=(X-1)^3}$

$\mathcal{E}_{1}=\mathsf{Ker}\,\big(A-I_3\big)=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\mathsf{Ker}\,\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\boxed{\mathsf{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$

Q 4. Le polynôme caractéristique de B est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{B \text{ est trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

B possède une seule valeur propre de multiplicité 3, or le sous-espace propre associé est de dimension $1<3$, donc $\boxed{B \text{ n'est par diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Q 5. $Bv_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ et $v_1+v_2=\begin{pmatrix}1+x\\-2+y\\1\end{pmatrix}$ donc $Bv_2=v_1+v_2$ $\boxed{v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

Q 6. $Bv_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\z\\t\end{pmatrix}$ et $v_2+v_3=\begin{pmatrix}-1+z\\1+t\\0\end{pmatrix}$ donc $Bv_3=v_2+v_3$ $\boxed{v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

Q 7. Tout d'abord la famille $\big(v_1,v_2,v_3\big)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car les vecteurs sont échelonnés.

Ensuite, d'après **Q3. Q5.** et **Q6.** ; $Bv_1=v_1$, $Bv_2=v_1+v_2$ et $Bv_3=v_2+v_3$;

Donc dans cette base la matrice semblable à B est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la formule de changement de base : $B = RTR^{-1}$ avec R la matrice de changement de base, soit : $\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Mat\big(v_1, v_2, v_3\big)}$

C. On revient au cas général, où $p \in \mathbb{N}^\star$ On pose $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 8. Montrons par récurrence sur p que $\chi_C(X) = \chi_p(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1$;

- ◇ *initialisation :* $C(a_1) = \big(a_1\big)$ et $\chi_C = \chi_1 = X - a_1$; la propriété est initialisée ;
- ◇ *hérédité :* supposons la propriété vraie pour un entier p ;

$$\chi_{p+1}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{p+1} \end{vmatrix} \underset{C_{p+1} \leftarrow C_p + C_{p+1}}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & X - a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{p+1} - 1 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\chi_{p+1}(X) = \underbrace{-(-1)^{2(p+1)-1}}_{=1} \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_1 \\ -1 & X & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_p \end{vmatrix}}_{\chi_p(X)} + \big(X - a_{p+1} - 1\big) \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}}_{\text{triangulaire}}$$

par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_{p+1}(X) &= X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1 + X^p\big(X - a_{p+1} - 1\big) \\ &= X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1 + X^{p+1} - a_{p+1} X^p - X^p \\ &= X^{p+1} - a_{p+1} X^p - \cdots - a_2 X - a_1 \end{aligned}$$ et la propriété est héréditaire ;

- ◇ *conclusion :* on a montré par récurrence que $\boxed{\chi_C(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1}$

Q 9. $C - \lambda I_p = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p - \lambda \\ -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$;

Cette matrice possède au moins $p - 1$ pivots donc est de rang au moins $p - 1$; ainsi $\boxed{\big(C - \lambda I_p\big) \geqslant p - 1}$

Un sous-espace propre de C peut être défini par $\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big)$, où λ est une valeur propre de C.

On applique le théorème du rang à la matrice $C - \lambda I_p$: $\mathsf{dim}\,\mathbb{R}^p = \mathsf{dim}\,\big(C - \lambda I_p\big) + \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big)$; et donc $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big) = p - \big(C - \lambda I_p\big)$; avec $\big(C - \lambda I_p\big) \geq p - 1$; on obtient $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big) \leqslant 1$;

Or on sait que si λ est valeur propre de C alors $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big) \geqslant 1$; on a donc $\boxed{\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\big(C - \lambda I_p\big) = 1}$

Q 10.

- Si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples, alors C est diagonalisable, par théorème.
- Réciproquement, supposons que C est diagonalisable ; le polynôme est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité des valeurs propres. Or on a montré à la question précédente que chaque sous-espace propre est de dimension 1, donc chaque valeur propre est de multiplicité 1, c'est-à-dire que toutes les racines du polynôme caractéristique sont simples.

En conclusion, on a montré

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable} \iff \text{son polynôme caractéristique est scindé à racines simples}}$$

Q 11. Soit P unitaire de degré p, il existe un unique $p-$uplet $\left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}\right)$ tel que

$$P = X^p + \lambda_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \lambda_0$$

P peut s'écrire $P = X^p - (-\lambda_{p-1})X^{p-1} - \cdots - (-\lambda_1)X - (-\lambda_0)$;

$$\boxed{P \text{ est donc le polynôme caractéristique de } C\big(-\lambda_0, -\lambda_1, ..., -\lambda_{p-1}\big)}$$

Q 12.

- Si Q est le polynôme caractéristique d'une matrice, alors Q est unitaire.
- Réciproquement, soit Q un polynôme unitaire ; alors, d'après la question précédente, Q est le polynôme caractéristique d'une matrice C.

En conclusion, on a montré que : $\boxed{Q \text{ est le polynôme caractéristique d'une matrice} \iff Q \text{ est unitaire}}$

EXERCICE 02

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2019 : valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\, dt.$

Q 13. La fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, en $+\infty$, $\underline{f(x) = o(1/x^2)}$ (croissance comparée). Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann).

Donc par comparaison $\underline{\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx \text{ converge.}}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ converge car $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ converge, il suite que $\underline{I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx \text{ converge.}}$

Q 14. Il suffit d'étudier la fonction $h :\mapsto \ln(1 + x) - x$ sur $] - 1, +\infty[$.

On a : $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$. La fonction h est croissante sur $] - 1, 0]$ et à valeurs dans $] - \infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $] - \infty, 0]$. Ainsi h est à valeurs négatives.

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{t \in [0, \sqrt{n}[}$, alors $-\frac{t^2}{n} \in] - 1, +\infty[$ donc en appliquant l'inégalité précédente :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$$

On compose par exp (croissante) : $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{t^2}{n}\right)$. Puis on passe à la puissance n (croissante sur $[0, +\infty[$) :

$$\underline{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp\left(-t^2\right)}$$

L'inégalité est aussi vraie pour $\underline{t = \sqrt{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$, alors

$$\exp\left(-t^2\right) \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \iff \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(t^2\right)$$

Cette dernière inégalité étant vraie en utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente.

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)}.$$

De plus, en $+\infty$: $\dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n})} \sim \dfrac{n}{t^2}$. Or $t \mapsto \frac{n}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann) donc par équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})} dt$ converge, puis par comparaison, $\underline{v_n \text{ converge}}$.

Q 17. Il suffit d'utiliser la première inégalité de la question **Q 15** et la croissance de l'intégrale, en intégrant sur $[0, \sqrt{n}]$.

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt.$$

Q 18. Il suffit d'utiliser la deuxième inégalité de la question **Q 15** et la croissance de l'intégrale, en intégrant sur $[0, \sqrt{n}]$. La fonction $t \mapsto \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ étant positive, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = v_n.$$

Il vient donc bien : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant I_n \leqslant v_n}$

Q 19. On pose $t = \sqrt{n}\sin(x)$, alors $dt = \sqrt{n}\cos(x)dx$ et $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $t = \sqrt{n} \Leftrightarrow x = \pi/2$. Donc :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2(x)\right)^n \sqrt{n}\cos(x)dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(x)dx$$

Finalement, $\underline{u_n = \sqrt{n}a_{2n+1}}$.

Q 20. On pose $t = \sqrt{n}\tan(x)$, alors $dt = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(x)}dx$ et $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $t = +\infty \Leftrightarrow x = \pi/2$. Donc :

$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{-n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)^{-n} \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(x)}dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x)dx$$

Finalement, $\underline{v_n = \sqrt{n}a_{2n-2}}$.

Q 21. A l'aide du résultat admis et de la question **Q 19**, $u_n \sim \sqrt{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ De même, $v_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En particulier,

$$u_n \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad v_n \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il suit donc du théorème d'encadrement et de la question **Q 18** que : $I_n \longrightarrow \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par ailleurs, puisque I converge, on a aussi $I_n \longrightarrow I$. L'unicité de la limite entraîne alors que :

$$\underline{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

EXERCICE 03

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2023 : étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x^a}$, ***où*** $a > 0$.

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_a(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x^a}$.

On note I_a et J_a les intégrales généralisées $I_a = \displaystyle\int_0^1 f_a(t)\, dt$ et $J_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\, dt$.

Q 22. Si $\underline{a \leqslant 0}$, la fonction f_a est continue sur $[0, 1]$ donc $\underline{I_a \text{ converge}}$.

Si $\underline{0 < a < 2}$, f_a est continue sur $]0, 1]$ et $f_a \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi x}{x^a} = \frac{\pi}{x^{a-1}}$.

De plus, $a-1<1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}dx$ converge (intégrale de Riemann), donc par équivalent des intégrales de fonctions positives $\underline{I_a \text{ converge}}$.

Si $\underline{a \geq 2}$ alors $a-1 \geqslant 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}dx$ diverge (intégrale de Riemann), puis par équivalent des intégrales de fonctions positives $\underline{I_a \text{ diverge}}$.

Q 23. Pour tout $t \geqslant 1$, $|f_a(t)| \leqslant \frac{1}{t^a}$.

Si $a>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ converge (intégrale de Riemann), donc par comparaison des intégrales des fonctions positives $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_a(t)|dt$ converge i.e. $\underline{J_a \text{ converge absolument}}$.

Q 24. Soit $X>1$. On pose $u(t) = \dfrac{1}{t^a}$ et $v'(t) = \sin(\pi t)$. Par <u>intégration par parties</u> :

$$\int_1^X f_a(t)dt = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi t^a}\right]_1^X - \int_1^X \frac{-a}{t^{a+1}}\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}dt = \frac{-1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi}\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}dt.$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question **Q 23**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}dt$ converge absolument, en particulier, elle converge i.e. $X \mapsto \displaystyle\int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$. Par ailleurs,

$$\left|\frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a}\right| \leqslant \frac{1}{\pi X^a} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

Finalement,

$$\int_1^X f_a(t)dt \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\frac{1}{\pi} - \frac{a}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}}dt$$

La fonction $X \mapsto \displaystyle\int_1^X f_a(t)dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$ et ainsi $\underline{J_a \text{ converge lorsque } a \in]0,1]}$.

Q 25. D'après ce qui précède, J_a converge pour tout $a>0$ (CVA pour $a>1$ et CV pour $a \in]0,1]$) et I_a converge ssi $a<2$. En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ converge si $0<a<2$ (somme de deux intégrales convergentes) et diverge si $a \geq 2$ (somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente). En résumé, $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt \text{ converge si, et seulement si } 0<a<2}$.

EXERCICE 04

Extrait du sujet CCINP filière TPC 2023 : étude de la convergence et calcul de la somme d'une série alternée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}dx$ et $u_n = (-1)^n v_n$.

Q 26. $u_0 = I_1$ et $1<2$ donc $\underline{u_0 \text{ existe}}$.

Celui qui n'a pas fait l'exercice 03 peut dire que $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}dx$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$, à valeurs positives et équivalente à π quand x tend vers 0, qui est une valeur finie. Ainsi u_0 est convergente.

Q 27. Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{x+n+1} \leqslant \dfrac{1}{x+n}$ puis comme $\sin(\pi x) \geqslant 0$, il vient : $\dfrac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leqslant \dfrac{\sin(\pi x)}{x+n}$. Par croissance de l'intégrale, il suit que $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc $\underline{(v_n) \text{ est décroissante}}$.

De plus, pour tout $n \geqslant 1$:

$$|v_n| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}dx = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\underline{(v_n) \text{ converge vers } 0}$.

Q 28. D'après la question précédente, (v_n) est décroissante et converge vers 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n v_n$. D'après le théorème spécial des séries alternées, il vient que $\underline{\sum u_n \text{ converge}}$.

Q 29. Soit $N \in \mathbb{N}$: $S_N - l = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Il faut utiliser le critère de majoration du reste des séries alternées.

$$\begin{aligned}|S_N - l| \leqslant |u_{N+1}| = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+N+1}dx &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+N+1}dx \\ &= [\ln(x+N+1)]_0^1 = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\end{aligned}$$

On peut développer une méthode pour calculer une valeur approchée de l à *epsilon* près en supposant connues les valeurs de la suite (u_n). (On ne demande pas de résultat numérique.)

En effet, si $\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right) < \epsilon \Leftrightarrow 1+\frac{1}{N+1} < e^{\epsilon} \Leftrightarrow N+1 > \dfrac{1}{e^{\epsilon}-1}$.

Il suffit de prendre $N = \lfloor \dfrac{1}{e^{\epsilon}-1} \rfloor$ et alors S_N est une valeur approchée de l à ϵ près.

Q 30. On pose $\underline{t = x+n}$ pour obtenir :

$$u_n = (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi(t-n))}{t}dt$$

Puis : $\sin(\pi(t-n)) = \sin(\pi t - n\pi) = \sin(\pi t)\cos(n\pi) - \cos(\pi t)\sin(n\pi) = \sin(\pi t)\cos(n\pi) = \sin(\pi t)(-1)^n$.

Donc on obtient bien :

$$\underline{u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t}dt}$$

Q 31. On a, par la relation de Chasles :

$$l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t}dt = \underline{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}dt}$$

Kulture : un étudiant un peu médium verrait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.