

EXERCICE 01

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = t^2$.

1. Le lecteur représente graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$ sans problème, ce sont des cuvettes qui se touchent et f est bien continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $\mathcal{C}^1$ aux points $(2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2-a La série de Fourier de f est notée : $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

Les coefficients b_n sont nuls, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car f est paire.

$$\text{Calculons } a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}.$$

2-b Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculons, en utilisant une double intégration par partie, l'intégrale $I_n = \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt$.

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^\pi 2t \frac{\sin(nt)}{n} dt + \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{n} \frac{\cos(nt)}{n} dt + \left[\frac{2t}{n} \cdot \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \left[-\frac{2}{n^2} \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

2-c On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $a_n = \alpha \frac{(-1)^n}{n^2}$, où α est à préciser.

$$\text{On a } a_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = \frac{4}{2\pi} I_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

2-d La série de Fourier de f est convergente d'après le théorème de Dirichlet car f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et tend vers f car f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Calculons $Sf(\pi)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$Sf(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2.$$

$$\text{On obtient } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Calculons $Sf(0)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

$$Sf(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n \cdot 0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0.$$

$$\text{On obtient } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5. Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

$$\begin{aligned} \text{On remarque que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=1, n \text{ pair}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1, n \text{ impair}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p}}{4p^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Il reste : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. Demandons à Marc-Antoine Parseval des chênes d'appliquer à f son égalité.

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

Cela donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

$$\text{Il reste : } 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7-a Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle de la série de Fourier de f est notée par :

$$S_N f(t) = a_0 + \alpha \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt), \text{ où } \alpha \text{ a été déterminé plus haut.}$$

$$\text{Alors } S_N f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n \text{ et cela donne :}$$

$$S_N f(\pi) - \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{Et donc : } S_N f(\pi) - \pi^2 = 4 \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

7-b Écrivons une fonction nommée S , en *Python* qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le nombre $S_N f(\pi)$.

```
import numpy as np; import math as mt
def S(N):
    a = sum(n**(-2) for n in range(1, N+1))
    return a + (mt.pi)**2 - 3
```

7-c Écrivons une fonction nommée FindN en *Python* qui prend en entrée un réel strictement positif ϵ et renvoie le plus petit entier N tel que $|S_N f(\pi) - \pi^2| \leq \epsilon$.

```
import numpy as np; import math as mt
def FindN(epsilon):
    N = 1
    som = S(N); a = (mt.pi)**2
    while np.abs(som - a) > epsilon:
        N = N+1; som = S(N)
    return N
```

EXERCICE 02

Cet exercice contient deux parties largement indépendantes et seule la dernière question de la partie B utilise des résultats de la partie A.

Partie A. Deux équations différentielles

Ici $\alpha \geq 0$ et on considère les deux équations différentielles :

$$(E_\alpha) : y'' + \alpha y = 0 \text{ et } (F_\alpha) : 4t y''(t) + 6 y'(t) + \alpha y(t) = 0.$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue $y \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. La forme générale des solutions de (E_0) : on a $y''(t) = 0 \Rightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, y(t) = at + b$.
2. La forme générale des solutions de (E_α) lorsque $\alpha > 0$: on a l'équation caractéristique $X^2 + \alpha^2$, donc $X = \pm i\sqrt{\alpha}$. Et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = a \cos(t\sqrt{\alpha}) + b \sin(t\sqrt{\alpha})$.

3-a Soient u et v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant pour tout $t > 0$, $u(t) = t v(t^2)$.

Pour tout $t > 0$, $u'(t) = v(t^2) + 2t^2 v'(t^2)$.

3-b Donnons en tout $t > 0$, une expression de $u''(t)$ sous la forme $P(t)v''(t^2) + Q(t)v'(t^2)$, où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes en t à trouver.

On a : $u''(t) = 2tv'(t^2) + 4tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2) = 6tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2)$.

3-c u est solution de (E_α) donne $u''(t) + \alpha u(t) = 0$ et donc

$$6tv'(t^2) + 4t^3v''(t^2) + \alpha tv(t^2) = 0.$$

On a le droit de diviser par $t > 0$.

$$4t^2v''(t^2) + 6v'(t^2) + \alpha v(t^2) = 0.$$

Il reste à poser $x = t^2$ et on a : $4xv''(x) + 6v'(x) + \alpha v(x) = 0$.

Ce qui équivaut à dire que v est solution de (F_α) .

4. Les solutions de (E_0) sont $u(t) = at + b$. Comme $at + b = tv(t^2)$, $a + \frac{b}{t} = v(t^2)$. Ainsi les solutions de (F_0) sont les fonctions $x \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

5. Les solutions de (E_α) sont $u(t) = a \cos(t\sqrt{\alpha}) + b \sin(t\sqrt{\alpha})$. On applique $u(t) = tv(t^2)$.

$$v(t^2) = \frac{1}{t} (a \cos(t\sqrt{\alpha}) + b \sin(t\sqrt{\alpha})) \Rightarrow v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (a \cos(\sqrt{\alpha x}) + b \sin(\sqrt{\alpha x})).$$

On a ainsi la forme générale des solutions de (F_α) quand $\alpha > 0$.

Partie B. Une équation aux dérivées partielles

Dans cette partie, on note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On considère de plus une fonction $v :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = v(x^2 + y^2 + z^2)$.

1. L'ensemble U est le complémentaire du fermé $(0, 0, 0)$ et est donc un ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

2-a f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car composée de $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, fonction polynomiale de classe $\mathcal{C}^2$ et de v qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2-b En tout $(x, y, z) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xv'(x^2 + y^2 + z^2)$.

2-c Pour tout $(x, y, z) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 4x^2v''(x^2 + y^2 + z^2) + 2v'(x^2 + y^2 + z^2)$.

Pour tout $(x, y, z) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 4y^2v''(x^2 + y^2 + z^2) + 2v'(x^2 + y^2 + z^2)$.

Pour tout $(x, y, z) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 4z^2v''(x^2 + y^2 + z^2) + 2v'(x^2 + y^2 + z^2)$.

2-d Pour tout triplet $(x, y, z) \in U$, une expression de

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

en fonction de $x^2 + y^2 + z^2$ et des fonctions v' et v'' est :

$$\Delta f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2 + z^2)v''(x^2 + y^2 + z^2) + 6v'(x^2 + y^2 + z^2).$$

On dit que Δf est le **laplacien** de f .

3. Soit $\alpha \geq 0$, supposons que f vérifie $\Delta f + \alpha f = 0$ sur U .

Alors : $4(x^2 + y^2 + z^2)v''(x^2 + y^2 + z^2) + 6v'(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha v(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

On pose $t = x^2 + y^2 + z^2$: $4tv''(t) + 6v'(t) + \alpha v(t) = 0$.

Et ainsi v est solution de l'équation (F_α) sur $]0, +\infty[$.

4. Donnons un exemple de fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie $\Delta g = 0$ sur U et qui ne soit pas une fonction affine.

Ici $\alpha = 0$, v est solution de F_0 si, et seulement si, $v(t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2$ et $v(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C_2$,

où C_1 et C_2 sont des constantes. On prend par exemple $g : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Remarque : Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ qui est la distance d'un point $M(x, y, z)$ à O , on peut dire que le laplacien de $1/r$ est nul.

EXERCICE 03

1. Le nombre de cas possibles pour un jeu est 2^n , en effet, chaque personne a une alternative et il y a n personnes.

2. Soit A l'événement : « une personne au moins n'a pas le même résultat que les autres » alors l'événement contraire $\overline{A}$ est : « les n personnes obtiennent toutes Pile ou les n personnes obtiennent toutes Face ». Ainsi,

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. On note X la v.a.r représentant le nombre de jeux nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres. Notons $p = P(A)$. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = 1) = p$. Puis $P(X = 2) = (1 - p)p$ et de façon générale, pour tout k entier non nul,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Ainsi $X \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique de raison p). Alors d'après le cours : $E(X) = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

En fonction de n :

$$p = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \text{ et } q = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow E(X) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1} \text{ et } V(X) = \frac{(2^{n-1} - 1)^2}{2^{3(n-1)}}.$$

Remarque : Cette question est très rapide à condition d'avoir reconnu une loi géométrique et de se souvenir de l'espérance et de la variance d'une telle loi. Si par contre vous n'avez pas reconnu une loi géométrique, ça peut être bien plus long en rédaction !