

TSI2. MATHÉMATIQUES

Samedi 14 février 2026. Durée : 4 heures

Pas de calculatrices autorisées et les différents exercices sont indépendants.

EXERCICE 01

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $\forall t \in [-\pi, \pi], f(t) = t^2$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

2. La série de Fourier de f est notée : $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

(a) Montrer que les coefficients b_n sont nuls, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_0 .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, en utilisant une double intégration par partie, l'intégrale $\int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt$.

(c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $a_n = \alpha \frac{(-1)^n}{n^2}$, où α est à préciser.

(d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.

3. Calculer $Sf(\pi)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. Calculer $Sf(0)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

6. Appliquer l'identité de Marc-Antoine Parseval des chènes à f , en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

7. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle de la série de Fourier de f est notée par :

$$S_N f(t) = a_0 + \alpha \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt), \text{ où } \alpha \text{ a été déterminé plus haut.}$$

(a) Montrer que $S_N f(\pi) - \pi^2 = \alpha \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} \right)$.

(b) Écrire une fonction nommée S , en *Python* qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le nombre $S_N f(\pi)$.

(c) Écrire une fonction nommée FINDN en *Python* qui prend en entrée un réel strictement positif ϵ et renvoie le plus petit entier N tel que $|S_N f(\pi) - \pi^2| \leq \epsilon$.

EXERCICE 02

Cet exercice contient deux parties largement indépendantes et seule la dernière question de la partie B utilise des résultats de la partie A.

Partie A. Deux équations différentielles

Ici $\alpha \geq 0$ et on considère les deux équations différentielles :

$$(E_\alpha) : y'' + \alpha y = 0 \text{ et } (F_\alpha) : 4t y''(t) + 6 y'(t) + \alpha y(t) = 0.$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. Donner la forme générale des solutions de (E_0) .

2. Donner la forme générale des solutions de (E_α) lorsque $\alpha > 0$.
3. Soient u et v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant pour tout $t > 0$, $u(t) = t v(t^2)$.
 - (a) Donner en tout $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t , $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.
 - (b) Donner en tout $t > 0$, une expression de $u''(t)$ sous la forme $P(t)v''(t^2) + Q(t)v'(t^2)$, où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes en t à trouver.
 - (c) En déduire que u est solution de (E_α) si, et seulement si, v est solution de (F_α) .
4. En déduire de la question précédente que les solutions de (F_0) sont les fonctions $t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
5. Donner de même la forme générale des solutions de (F_α) quand $\alpha > 0$.

Partie B. Une équation aux dérivées partielles

Dans cette partie, on note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On considère de plus une fonction $v :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = v(x^2 + y^2 + z^2)$.

1. Répondre (en justifiant juste un peu) aux questions suivantes : l'ensemble U est-il ouvert dans $\mathbb{R}^3$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^3$?
2. Cette question va donner l'expression du laplacien de f en fonction de v .
 - (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .
 - (b) Donner en tout $(x, y, z) \in U$, une expression de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et de v' .
 - (c) Trouver un polynôme P de variable x et une constante K tels que :

$$\forall (x, y, z) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = P(x)v''(x^2 + y^2 + z^2) + K v'(x^2 + y^2 + z^2).$$

Trouver de même l'expression analogue pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)$ et pour $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$.

- (d) En déduire, pour tout triplet $(x, y, z) \in U$, une expression de

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

en fonction de $x^2 + y^2 + z^2$ et des fonctions v' et v'' . On dit que Δf est le **laplacien** de f .

3. Soit $\alpha \geq 0$, montrer que f vérifie $\Delta f + \alpha f = 0$ sur U si, et seulement si, v est solution de l'équation (F_α) sur $]0, +\infty[$.
4. Donner un exemple de fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie $\Delta g = 0$ sur U et qui ne soit pas une fonction affine. *Indication : on pourra utiliser la question 4 de la partie A.*

EXERCICE 03

Un petit exo de proba pour la route

Ici n est un entier au moins égal à 2. On suppose que n personnes lancent simultanément n pièces équilibrées (donc chaque personne lance une pièce). Le résultat pour chaque personne est Pile ou Face. On dit qu'un tel process est un jeu.

1. Déterminer en fonction de n le nombre de cas possibles pour un jeu.
2. Déterminer la probabilité p qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres au cours d'un jeu donné (on pourra passer par l'événement contraire)
3. On note X la v.a.r représentant le nombre de jeux nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres.
Reconnaître la loi de X et donner l'espérance et la variance de X en fonction de p puis de n .