

Problème

Q1. Soit $Q(X) = 1 = a_0$ et les autres coefficients sont nuls.

Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_0 \cdot X^{2n}$ car seul le terme pour $k = 2n$ est non nul. Ainsi :

$$s(1) = X^{2n}$$

Soit $Q(X) = X^n$ i.e. $a_n = 1$ et les autres coefficients sont nuls.

Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_n \cdot X^n$ car seul le terme pour $k = n$ est non nul. Ainsi :

$$s(X^n) = X^n$$

Soit $Q(X) = X^{2n}$ i.e. $a_{2n} = 1$ et les autres coefficients sont nuls.

Alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = a_{2n} \cdot X^0$ car seul le terme pour $k = 0$ est non nul. Ainsi :

$$s(X^{2n}) = 1$$

Q2. D'une part, comme $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$, $s(Q)$ est de degré inférieur ou égal à $2n$, donc $S(Q) \in E$.

D'autre part, soient $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E$, $P = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $c_k = \lambda b_k + a_k$,

et $s(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{2n} c_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} (\lambda b_{2n-k} + a_{2n-k}) X^k = \lambda \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k + \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$
 $= \lambda \cdot s(P) + s(Q)$, donc s est linéaire.

s est un endomorphisme de E

Q3. a) Soit $n = 1$, i.e. $2n = 2$. D'après Q1, $s(1) = X^2 = 0 + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2$ (1ère colonne),

$s(X) = s(X^n) = X^n = X = 0 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2$ (2ème colonne)

et $s(X^2) = s(X^{2n}) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2$ (3ème colonne).

Ainsi, en écrivant les coordonnées de ces 3 polynômes en colonnes, on retrouve que :

la matrice de s dans la base canonique de E est M .

M est une matrice symétrique et réelle. D'après le théorème spectral,

M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Remarque : On pourra chercher P orthogonale. C'est ce qui a été fait dans la suite, même si ce n'était pas demandé.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{X}_M(\lambda) &= \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la 2ème colonne} \\
&= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{1_{(2)}, -1_{(1)}\}}$$

On cherche maintenant à expliciter $E_{-1} = \ker(-I - M) = \ker(I + M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} &\iff (I + M) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Posons } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Alors } E_{-1} = \text{vect} \langle e_1 \rangle}$$

$e_1 \neq \vec{0}$ et e_1 engendre E_{-1} , donc

$$\boxed{(e_1) \text{ est une base de } E_{-1}}$$

1ère méthode : On peut procéder de même pour E_1 en résolvant un système.

ou **2ème méthode :** Même si on ne demande pas de matrice P orthogonale, on peut utiliser le cours (ce qui est aussi rapide que la résolution du système) : comme M est symétrique et réelle, E_1 est orthogonal à E_{-1} . De plus, $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$ (car M est diagonalisable.) Finalement $E_1 = E_{-1}^\perp$.

$$\text{Soit } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 \in E_1. \text{ Posons } e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 \perp e_1 \text{ donc}$$

$e_3 \in E_1$.

(e_2, e_3) forme une famille libre (car ces 2 vecteurs sont non colinéaires) de deux éléments de E_1 et $\dim E_1 = 2$ (l'ordre de multiplicité de la valeur propre car M est diagonalisable), donc

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } E_1}$$

c) Comme M (resp. s) est diagonalisable, en mettant bout à bout une base de chacun des sous espaces propres, on obtient une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. de E).

De plus, en repassant en écriture polynômiale, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - X^2)\right)$ est une base de $E_{-1}(s)$, et $\left(X, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + X^2)\right)$ est une base de $E_1(s)$, d'où :

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - X^2), X, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + X^2)\right)$ est une base (orthonormale) de E formée de vecteurs propres de s .

D'après ce qui précède,

la matrice de s dans cette base est $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q4. a) Soit $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ un polynôme quelconque de E ,

alors $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$ avec $b_k = a_{2n-k}$.

d'où $s \circ s(Q) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-(2n-k)} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = Q$. Ainsi :

$s \circ s = id$ donc s est une symétrie.

Comme s n'est ni id , ni $-id$, on en déduit :

$\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}$

b) Pour $0 \leq k \leq n-1$, les coefficients de A_k sont nuls sauf $a_k = a_{2n-k} = 1$

d'où $s(A_k) = s(X^{2n-k} + X^k) = a_{2n-k}X^k + a_kX^{2n-k} = A_k$.

$s(X^n) = X^n$ d'après Q1, d'où $s(A_n) = A_n$

Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, les coefficients de A_k sont nuls sauf $a_k = 1$ et $a_{2n-k} = -1$

d'où $s(A_k) = s(X^k - X^{2n-k}) = a_{2n-k}X^k + a_kX^{2n-k} = -X^k + X^{2n-k} = -A_k$.

Par conséquent, $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, et $A_{n+1}, \dots, A_{2n}$ sont des vecteurs propres associés à -1.

$(A_0, A_1, \dots, A_{2n})$ est une famille de vecteurs propres de s .

c) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{2n} \alpha_k A_k = 0$, alors $\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0$. (1)

Comme $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $A_k \in E_1$, et que E_1 est un espace vectoriel, $\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k \in E_1$.

De même, $\sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k \in E_{-1}$.

En composant (1) par s , on obtient alors $s \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k \right) + s \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k \right) = 0$, soit encore

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A_k - \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0 \quad (2)$$

Et en combinant (1) et (2), on a
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k = 0 & (3) \\ \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k A_k = 0 & (4) \end{cases}.$$

Or pour $0 \leq k \leq n$, A_k est de degré $2n-k$, donc $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré : cette famille est libre. Et (3) $\Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \alpha_k = 0$.

De même, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, A_k est de degré $k > 2n-k$, donc $(A_{n+1}, \dots, A_{2n})$ est constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré : cette famille est libre.

Et (4) $\Rightarrow \forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket \alpha_k = 0$.

Finalement, $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \alpha_k = 0$:

$$(A_0, A_1, \dots, A_{2n}) \text{ est une famille libre de } E.$$

d) $(A_0, A_1, \dots, A_{2n})$ est une famille libre de E qui contient $2n+1$ éléments.

Or $\dim E = \dim \mathbb{R}_{2n}[X] = 2n+1$, donc

$$\mathcal{B}_2 = (A_0, A_1, \dots, A_{2n}) \text{ est une base de } E.$$

La matrice de s dans $\mathcal{B}_2$ est $D = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n \text{ fois}})$.

$$s \text{ est diagonalisable.}$$

$$\dim E_1 = n+1 \text{ et } \dim E_{-1} = n$$

Q5. a) D'après l'énoncé, $R_3(X) = XR_2(X) - R_1(X) = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 2X - X = X^3 - 3X$,
et $R_4(X) = XR_3(X) - R_2(X) = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 3X^2 - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2$.

$$\text{conclusion : } R_3(X) = X^3 - 3X \text{ et } R_4(X) = X^4 - 4X^2 + 2$$

b) Démontrons le résultat demandé à l'aide d'une récurrence double.

Soit $\mathcal{P}_k$: " R_k est de degré k et $\forall x \in \mathbb{C}^* \quad R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^k + \frac{1}{x^k}$ "

• Initialisation :

Soit $k = 1$: $R_1(X) = X$ donc R_1 est de degré 1 et $\forall x \in \mathbb{C}^* \quad R_1 \left(x + \frac{1}{x} \right) = x + \frac{1}{x} = x^1 + \frac{1}{x^1}$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $k = 2$: $R_2(X) = X^2 - 2X$ donc R_2 est de degré 2 et

$\forall x \in \mathbb{C}^* \quad R_2 \left(x + \frac{1}{x} \right) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

• Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{k+2}$ est vraie.

$R_{k+2} = XR_{k+1} - R_k$. $\deg(R_k) = k$ et $\deg(R_{k+1}) = k+1$ par hypothèse de récurrence, donc $\deg(XR_{k+1}) = k+2$, et par somme, comme $k \neq k+2$, $\deg(R_{k+2}) = k+2$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{C}^* \quad R_{k+2} \left(x + \frac{1}{x} \right) &= \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot R_{k+1} \left(x + \frac{1}{x} \right) - R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) \\
&= \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \right) - \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) \text{ d'après } \mathcal{P}_k \text{ et } \mathcal{P}_{k+1} \\
&= x^{k+2} + x^k + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} - x^k - \frac{1}{x^k} = x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{k+2}$ est vraie.

• Conclusion : on a montré par récurrence double que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, R_k \text{ est de degré } k \text{ et } \forall x \in \mathbb{C}^* \quad R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^k + \frac{1}{x^k}}$$

c) Comme $x \neq 0$, $x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0$ ($\mathcal{E}$).

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = a^2 - 4$.

1er cas : si $a = \pm 2$, $\Delta = 0$ et ($\mathcal{E}$) a une racine double $x = \frac{a}{2}$.

2ème cas : si $a > 2$ ou $a < -2$, ($\mathcal{E}$) a deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

3ème cas : si $-2 < a < 2$, ($\mathcal{E}$) a deux racines complexes conjuguées $x_1, x_2 = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}$.

Q6. a) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = a_{2n-k}$. Alors pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, comme $2n - k \leq 2n - (n+1) \leq n-1$, on a $a_{2n-k} = a_{2n-(2n-k)} = a_k$.

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $a_k = a_{2n-k}$.

Par conséquent, $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = Q(X)$. De plus $Q \neq 0$ car $a_{2n} \neq 0$.

$$\boxed{Q \text{ est un vecteur propre de } s \text{ associé à la valeur propre } 1.}$$

b) $Q(0) = a_0 = a_{2n-0} = a_{2n} \neq 0$ par hypothèse :

$$\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad x^n \cdot \tilde{Q}(y) &= x^n \cdot \left(a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) = x^n \cdot \left(a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) \right) \text{ d'après Q5)b)} \\
&= a_n x^n + x^n \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_{n-k} x^k + \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{1}{x^k} \right) \\
&= a_n x^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} x^{k+n} + \sum_{k=1}^n a_{n-k} x^{n-k} \\
&= a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2n} a_{2n-i} x^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \text{ en posant } i = k+n \text{ et } j = n-k \\
&= a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \text{ car } a_{2n-i} = a_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = Q(x)$$

Si $\tilde{Q}(y) = 0$ alors $Q(x) = x^n \cdot 0 = 0$

Si $Q(x) = 0$, alors $x^n \cdot \tilde{Q}(y) = 0$ et $x \neq 0$ d'après Q6.b), donc $\tilde{Q}(y) = 0$.

Conclusion : $Q(x) = 0 \iff \tilde{Q}(y) = 0$

Intérêt : Chercher les racines de Q de degré $2n$ revient à chercher celles de $\tilde{Q}$ de degré n . Ainsi, pour chercher les racines de Q , on cherche les racines de $\tilde{Q}$ puis on utilise la question Q5.c).

d) i. Dans cet exemple : $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -9, a_3 = 2, a_4 = -9$ et $a_5 = a_6 = 1$.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(X) &= a_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3-k} R_k = a_3 + a_2 R_1 + a_1 R_2 + a_0 R_3 = 2 - 9X + 1 \cdot (X^2 - 2) + 1 \cdot (X^3 - 3X) \\ &= 2 - 9X + X^2 - 2 + X^3 - 3X = X^3 + X^2 - 12X. \end{aligned}$$

On a bien $\tilde{Q}(X) = X^3 + X^2 - 12X$

ii. $\tilde{Q}(X) = X(X^2 + X - 12)$. Le discriminant de $X^2 + X - 12$ est $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$, d'où $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$.

Les racines de $\tilde{Q}$ sont 0, -3 et 4.

D'après Q5.c) :

$$y = 0 \iff x + \frac{1}{x} = 0 \iff x_1, x_2 = \frac{0 \pm i\sqrt{4}}{2} = \pm i \text{ (cas 3 avec } a = 0)$$

$$y = -3 \iff x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (cas 2 avec } a = -3)$$

$$y = 4 \iff x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \text{ (cas 2 avec } a = 4)$$

Les racines de Q sont $i, -i, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

Q7. a) $n = 1$ et $E = \mathbb{R}_2[X]$. $p = 2$: les coefficients sont 1 ou 2.

Ainsi $Q(X) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \{1; 2\}$. On a 2 choix pour chacun des 3 coefficients d'où

Le cardinal de Ω est $2^3 = 8$

Les éléments de Ω sont :

$$Q_1(X) = X^2 + X + 1 \text{ pour lequel } s(Q_1) = Q_1 \text{ et } Z(Q_1) = 3,$$

$$Q_2(X) = 2X^2 + X + 1 \text{ pour lequel } s(Q_2) = X^2 + X + 2 \text{ et } Z(Q_2) = 1,$$

$$Q_3(X) = X^2 + 2X + 1 \text{ pour lequel } s(Q_3) = Q_3 \text{ et } Z(Q_3) = 3,$$

$$Q_4(X) = X^2 + X + 2 \text{ pour lequel } s(Q_4) = 2X^2 + X + 1 \text{ et } Z(Q_4) = 1,$$

$$Q_5(X) = 2X^2 + 2X + 1 \text{ pour lequel } s(Q_5) = X^2 + 2X + 2 \text{ et } Z(Q_5) = 1,$$

$Q_6(X) = 2X^2 + X + 2$ pour lequel $s(Q_6) = Q_6$ et $Z(Q_6) = 3$,
 $Q_7(X) = X^2 + 2X + 2$ pour lequel $s(Q_7) = 2X^2 + 2X + 1$ et $Z(Q_7) = 1$,
 $Q_8(X) = 2X^2 + 2X + 2$ pour lequel $s(Q_8) = Q_8$ et $Z(Q_8) = 3$,

Finalement $Z(\Omega) = \{1; 3\}$ et la loi de Z est donnée par le tableau suivant :

z_i	1	3	
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

b) Z est finie donc $E(Z)$ et $V(Z)$ existent.

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{D'après le théorème de transfert : } E(Z^2) = \sum_{i=1}^2 z_i^2 \mathbb{P}(Z = z_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$\text{et d'après la formule de Koenig-Huygens : } V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1.$$

En conclusion, $E(Z) = 2$ et $V(Z) = 1$.

- Q8. a) À la ligne 5, le programme génère une liste (en compréhension) de N réalisations de Z , qu'il transforme ensuite en vecteur.
- b) La fonction `tabeff` génère un "tableau des effectifs" correspondant aux réalisations de la variable Z obtenues à la ligne 5. Plus précisément, le tableau `eff` retourné contient le nombre d'occurrences dans `Obs` de 1, de 2, ..., de $2n + 1$. À cet effet, la fonction `sum(Obs==i)` compte le nombre d'occurrences de i dans `Obs`.
- c) Puisque `len(Obs)` vaut N , la commande `tabeff/N` renvoie chaque effectif divisé par l'effectif total. Le diagramme affiché représente donc la proportion des différentes valeurs de `Obs`. Cela correspond à la "loi observée" de Z .
- Q9. a) Comme quel que soit le polynôme Q , $N_n(Q) = N_{2n-n}(Q)$, et $Z_n(Q) = 1$.

Z_n suit la loi certaine. (loi constante égale à 1)

- b) $N_k(Q)$ est le coefficient d'indice k de Q . Par hypothèse, il est choisi de manière équiprobable dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, d'où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathbb{P}(N_k = i) = \frac{1}{p}$:

N_k suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, p \rrbracket$.

On a alors :

$$E(N_k) = \frac{p+1}{2}$$

$$V(N_k) = \frac{p^2 - 1}{12}$$

- c) $\{N_k = i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ forme un système complet d'événements. D'où, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{2n-k} = N_k) &= \sum_{i=1}^p \mathbb{P}((N_{2n-k} = N_k) \cap (N_k = i)) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}((N_{2n-k} = i) \cap (N_k = i)) \\
&= \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(N_{2n-k} = i) \cdot \mathbb{P}(N_k = i) \text{ car les coefficients sont choisis de manière indépendante.} \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(N_{2n-k} = N_k) = \frac{1}{p}$

d) $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(N_{2n-k} = N_k) = \frac{1}{p}$ d'après Q9.c) :

$Z_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{p}$

Y est la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{p}$, donc :

$Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{p}$

e) Y compte le nombre de coïncidences entre a_k et a_{2n-k} pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Or, s'il y a une coïncidence entre a_k et a_{2n-k} pour $k \leq n-1$, il y a aussi une coïncidence entre a_k et a_{2n-k} pour $k \geq n+1 \Leftrightarrow 2n-k \leq n-1$. A cela s'ajoute la coïncidence entre a_n et $a_{2n-n} = a_n$ qui correspond à Z_n . Finalement

$Z = 2Y + Z_n$

Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = 2E(Y) + E(Z_n) = 2 \cdot \frac{n}{p} + 1$ d'après l'espérance d'une loi binomiale et d'une loi constante.

De plus, $V(Z) = V(2Y + Z_n) = V(2Y + 1) = 2^2 V(Y) = 4 \cdot \frac{n}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Conclusion : $E(Z) = \frac{2n}{p} + 1$ et $V(Z) = \frac{4n}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Exercice

Q10. a) i. Supposons qu'il existe $\gamma > 0$ tel que la série $\sum a_n x^n$ converge sur $] -\gamma, \gamma[$, et posons

$$\forall x \in] -\gamma, \gamma[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\gamma, \gamma[$, et :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\gamma, \gamma[\quad F'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ F''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\gamma, \gamma[\quad x.F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \stackrel{j=n+1}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{j-1} x^j \\ F'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \stackrel{j=n-1}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} x^j = a_1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} x^j \\ xF''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} \stackrel{j=n-1}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} (j+1)j a_{j+1} x^j \end{aligned}$$

en sommant ce qui précède, on obtient que :

F est solution de (E) sur $] -\gamma, \gamma[$

$$\begin{aligned} \iff \forall x \in] -\gamma, \gamma[\quad a_1 + \sum_{j=1}^{+\infty} [a_{j-1} + (j+1)a_{j+1} + (j+1)j a_{j+1}] x^j &= 0 \\ \iff \forall x \in] -\gamma, \gamma[\quad a_1 + \sum_{j=1}^{+\infty} [a_{j-1} + (j+1)^2 a_{j+1}] x^j &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, cela équivaut à :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall j \in \mathbb{N}^* \quad a_{j-1} + (j+1)^2 a_{j+1} = 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall j \in \mathbb{N}^* \quad a_{j+1} = -\frac{1}{(j+1)^2} a_{j-1} \end{cases} \\ \stackrel{n=j+1}{\iff} &\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2} \end{cases} \end{aligned}$$

En conséquence, $\forall n \geq 2 \quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$

ii. D'après la question précédente et par récurrence directe, on montre que

$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0$

Remarque : récurrence à écrire si l'on n'arrive pas à faire celle de la question suivante.

iii. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2}$.

— Initialisation : On a bien, pour $p = 0$,

$$\frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2} = \frac{1 \times a_0}{1} = a_0$$

— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2}$. Alors, d'après la question (i),

$$a_{2(p+1)} = \frac{-a_{2p}}{(2p+2)^2} = \frac{-1}{4(p+1)^2} \times \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2} = \frac{(-1)^{p+1} a_0}{4^{p+1} ((p+1)!)^2}.$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

En conclusion, on a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2}}$$

b) On a déterminé le développement en série entière de la fonction F définie à la question 10, si celle-ci existe. Il est donné par :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2} x^{2p}.$$

Déterminons son rayon de convergence. D'une part, supposons que $a_0 = 0$. Alors il est clair que $R = +\infty$. D'autre part, supposons désormais que $a_0 \neq 0$. Posons $z \in \mathbb{C}^*$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons

$$u_p = \left| \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)^2} z^{2p} \right| = \frac{|a_0|}{4^p (p!)^2} |z|^{2p}.$$

Alors $u_p > 0$ et

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{\frac{|a_0|}{4^{p+1} ((p+1)!)^2} |z|^{2p+2}}{\frac{|a_0|}{4^p (p!)^2} |z|^{2p}} = \frac{|z|^2}{4(p+1)^2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum_p u_p$ converge absolument. On en déduit que $R \geq |z|$, et ce pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{R = +\infty}$$

Respectivement, il convient de montrer que toutes les fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \lambda}{4^p (p!)^2} x^{2p}$$

sont bien solutions de (E).¹ Puisqu'on peut remonter la chaîne d'équivalences de la question 10a, on trouve ainsi qu'il existe des fonctions développables en série entière et solutions de (E), et que leur ensemble est

$$\boxed{\text{Vect} \left(x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} x^{2p} \right), \text{ soit un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ de dimension 1.}}$$

1. Il s'agit de la synthèse du problème, on a fait jusqu'ici l'analyse.

Q11. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1[$, l'unique borne incertaine de l'intégrale est donc 1. Dans un premier temps, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$|h(x, t)| = \frac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dans un second temps,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

Dans un troisième temps, en effectuant le changement de variable $s = 1 - t$ ($t \mapsto 1 - t$ est strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$), on remarque que les intégrales $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ et $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2}\sqrt{s}}$ ont même nature (et même valeur en cas de convergence). Or $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ converge. D'après le théorème de comparaison des fonctions positives (version $\sim$), on en déduit que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge. D'après le théorème de comparaison des fonctions positives (version $\leq$), on en déduit que $\int_0^1 \frac{\cos(xt)dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge absolument. Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\cos(xt)dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Q12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons le changement de variable $t = \sin(\theta)$ ou $\theta = \arcsin(t)$ ($\sin$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$). Quand θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, t varie de 0 à 1, et

$$d\theta = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ainsi les intégrales $\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta$ et $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ ont même nature, et sont égales en cas de convergence. Or d'après la question 11, la seconde converge. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = H(x).}$$

Q13. (a) Soit $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos(\omega x + n \frac{\pi}{2}).$$

— Initialisation : On a bien, pour $n = 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = \cos(\omega x) = \omega^0 \cos(\omega x + 0 \times \frac{\pi}{2}).$$

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos(\omega x + n \frac{\pi}{2})$. Alors

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (\varphi^{(n)})'(x) = \omega^n \times (-\omega \sin(\omega x + n \frac{\pi}{2})).$$

Or, par formules usuelles,

$$\begin{aligned}\cos(\omega x + (n+1)\frac{\pi}{2}) &= \cos(\omega x + n\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\omega x + n\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin(\omega x + n\frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \omega^{n+1} \cos(\omega x + (n+1)\frac{\pi}{2}).$$

Ainsi la propriété est héréditaire. On a bien montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos(\omega x + n\frac{\pi}{2})}$$

(b) (question hors-programme en TSI selon le programme en 2024/2025)

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$, et, d'après la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) = \sin(\theta)^n \cos(x \sin(\theta) + n\frac{\pi}{2})}$$

(c) Posons la fonction constante $M : \theta \mapsto 1$. Alors, pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) \right| = |\sin(\theta)^n| \left| \cos(x \sin(\theta) + n\frac{\pi}{2}) \right| \leq 1 \times 1.$$

Donc

$$\boxed{\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad \left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) \right| \leq M(\theta)}$$

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, et d'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt.$$

Notons $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) d\theta \right| dt \leq \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) \right| d\theta dt \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \int_0^{\pi/2} d\theta dt \leq \left[\frac{-\pi(x-t)^{n+1}}{2n!(n+1)} \right]_{t=0}^x \\ &\leq \frac{\pi}{2} \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On sait que $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_k \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge et que $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Ainsi

G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$

Q15. (a) Par définition,

$$G(0) = \int_0^{\pi/2} \cos(0 \times \sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$G(0) = \frac{\pi}{2}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par partie en remarquant que les fonctions $u : \theta \mapsto \sin(x \sin \theta)$ et $v : \theta \mapsto \cos \theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} G'(x) &= - \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &= [\cos \theta \sin(x \sin \theta)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \cos(\theta)^2 \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &= 0 - x \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta + x \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Or

$$G''(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \cos(x \sin \theta + \pi) d\theta = - \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^2 \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Ainsi

$$G'(x) = -x(G''(x) + G(x)).$$

(c) G est développable en série entière et solution de (E) , donc d'après la question 10b, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F = \lambda G$. Or $F(1) = 1$ et $G(1) = \frac{\pi}{2}$, et on rappelle que $G = H$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2G(x)}{\pi} = \frac{2H(x)}{\pi}.$$

Q16. (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On sait que, d'après la question 11, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente. Alors, pour tout $y \in]0, 1[$, par relation de Chasles,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ainsi, par définition,

$$\lim_{y \rightarrow 1} \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

Par définition de la limite, il existe donc α tel que, pour tout $y \in [\alpha, 1]$,

$$\left| \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_\alpha^1 h(x, t) dt \right| \leq \int_\alpha^1 \frac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_\alpha^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ainsi,

$$\left| \int_\alpha^1 h(x, t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- (b) Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^\alpha h(x, t) dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x\sqrt{1-t^2}} \right]_{t=0}^\alpha - \int_0^\alpha \frac{t \sin(xt) dt}{x(1-t^2)^{3/2}} = \frac{\sin(\alpha x)}{x\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{x} \int_0^\alpha \frac{t \sin(xt) dt}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

D'une part,

$$\frac{-1}{x\sqrt{1-\alpha^2}} \leq \frac{\sin(\alpha x)}{x\sqrt{1-\alpha^2}} \leq \frac{1}{x\sqrt{1-\alpha^2}},$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x\sqrt{1-\alpha^2}} = 0.$$

D'autre part,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^\alpha \frac{t \sin(xt) dt}{(1-t^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^\alpha \frac{t dt}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^\alpha \frac{t \sin(xt) dt}{(1-t^2)^{3/2}} = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha h(x, t) dt = 0}$$

- (c) Fixons α défini à la question 16a. De la question 16b, en revenant à la définition de limite, on a l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq x_0$,

$$\left| \int_0^\alpha h(x, t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $x \geq x_0$, on a alors par inégalité triangulaire

$$|H(x)| = \left| \int_0^1 h(x, t) dt \right| \leq \left| \int_0^\alpha h(x, t) dt \right| + \left| \int_\alpha^1 h(x, t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Par définition, on a donc montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$. Donc, d'après la question 15c,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$$

Q17. En suivant la méthode de la question 15, on va montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H'(x) = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$.

— Premièrement, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\left| \int_{\alpha}^1 \frac{-t \sin(xt) dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \int_{\alpha}^1 \frac{|t \sin(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_{\alpha}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Donc d'après le raisonnement de la question 15a, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\left| \int_{\alpha}^1 \frac{-t \sin(xt) dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

— Deuxièmement, par intégration par partie,

$$\int_0^{\alpha} \frac{-t \sin(xt) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\frac{t \cos(xt)}{x \sqrt{1-t^2}} \right]_{t=0}^{\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{\cos(xt) dt}{x(1-t^2)^{3/2}} = \frac{\alpha \cos(x\alpha)}{x \sqrt{1-\alpha^2}} - \int_0^{\alpha} \frac{\cos(xt) dt}{x(1-t^2)^{3/2}}.$$

En utilisant le théorème des gendarmes, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \cos(x\alpha)}{x \sqrt{1-\alpha^2}} = 0,$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire et le théorème d'encadrement, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(xt) dt}{x(1-t^2)^{3/2}} = 0.$$

— On déduit comme à la question 15c que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H'(x) = 0.$$

— On sait que $F = \frac{2}{\pi} H$ donc $F' = \frac{2}{\pi} H'$, on en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0}$$

Rédigé par :

Florian Bouguet, TSI 2, Lycée Benjamin Franklin, Orléans

et

Frédérique Evrard, TSI 2, Lycée Rouvière, Toulon.