

Q1. a) On a

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

et, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, en posant $Z_F = aX + bY + cE$,

$$Z_F = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + c \\ \vdots \\ ax_n + by_n + c \end{pmatrix},$$

donc

$$\|Z - Z_F\|^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - (ax_i + by_i + c))^2 = \delta.$$

Ainsi, $\sqrt{\delta} = \|Z - Z_F\|$.

Remarquons que Z_F est élément quelconque de F . Par croissance stricte de la fonction racine carré sur $\mathbb{R}_+$, minimiser δ est équivalent à minimiser $\|Z - Z_F\|$ lorsque Z_F parcourt F .

- b)** Par le théorème de la projection orthogonale, ce minimum est atteint en un unique vecteur $Z_0 \in F$, qui est le projeté orthogonal de Z sur F .
- c)** On a la décomposition $Z = Z_0 + (Z - Z_0)$, avec $Z - Z_0 \in F^\perp$. Comme $X \in F$, on a par bilinéarité du produit scalaire

$$(Z | X) = (Z_0 | X) + (Z - Z_0 | X).$$

Comme $Z - Z_0 \in F^\perp$ et comme $X \in F$, on a $X \perp Z - Z_0$, donc

$$(Z | X) = (Z_0 | X).$$

Q2. a) On a

$$(E | E) = \sum_{i=1}^n (1 \times 1) = n.$$

b) On a

$$(Z | X) = \sum_{i=1}^n z_i x_i = -100$$

et

$$(Z_0 | X) = \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c)x_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i y_i + c \sum_{i=1}^n x_i = 700a + 800b - 100c.$$

Ainsi,

$$700a + 800b - 100c = -100,$$

ce qui donne bien la première ligne du système :

$$7a + 8b - c = -1.$$

En exprimant de même $(Z | Y) = (Z_0 | Y)$ et $(Z | E) = (Z_0 | E)$, on obtient directement les deux autres lignes du système : $8a + 5b + 2c = 3$ et $-a + 2b + c = -3$.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 7a + 8b - c = -1 \\ 8a + 5b + 2c = 3 \\ -a + 2b + c = -3 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} 7a + 8b - c = -1 \\ 22a + 21b = 1 \\ 6a + 10b = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 8b - c = -1 \\ 22a + 21b = 1 \\ 3a + 5b = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow 21L_3 - 5L_1]{L_2 \leftarrow 21L_2 - 5L_1} \begin{cases} 7a + 8b - c = -1 \\ 22a + 21b = 1 \\ -47a = -47 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le plan solution est d'équation $z = ax + by + c$, soit

$$x - y - z = 0.$$

Q3. a) Immédiatement, on peut prendre $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Comme Π est un plan dans $\mathbb{R}^3$, $\Pi^\perp$ est une droite vectorielle, et $\vec{n} \in \Pi^\perp$, donc $\Pi^\perp = \text{Vect}(\vec{n})$. Remarquons que $\vec{n}$ est une base orthonormée de $\Pi^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ sur $\Pi^\perp$ est

$$(\vec{u} | \vec{n})\vec{n}.$$

Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur Π est donc

$$\vec{u} - (\vec{u} \mid \vec{n})\vec{n}.$$

La distance de $\vec{u}$ à Π est donc, comme $\vec{n}$ est unitaire,

$$\|\vec{u} - (\vec{u} - (\vec{u} \mid \vec{n})\vec{n})\| = \|(\vec{u} \mid \vec{n})\vec{n}\| = |(\vec{u} \mid \vec{n})|\|\vec{n}\| = |(\vec{u} \mid \vec{n})|.$$

- c) On peut calculer la plus grande distance entre un des vecteurs $\overrightarrow{OM_i}$ et le plan Π , ce qui donne une évaluation quantitative du défaut de planéité. Si la surface est parfaitement plane, cette plus grande distance sera nulle.

Pour donner une évaluation plus pertinente, on pourrait d'abord renormaliser le problème, par exemple en recentrant les points autour de leur moyenne puis en les divisant par l'écart-type (racine carrée de la moyenne des carrés des distances à la moyenne).

- a) La matrice A est symétrique et à coefficients réels, donc par le théorème spectral A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de A).
- b) On calcule

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-20 & 10 & 10 \\ 10 & X-20 & 10 \\ 10 & 10 & X-20 \end{vmatrix} \\ &=_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} X & 10 & 10 \\ X & X-20 & 10 \\ X & 10 & X-20 \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 1 & X-20 & 10 \\ 1 & 10 & X-20 \end{vmatrix} \\ &=_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} X \begin{vmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 0 & X-30 & 0 \\ 0 & 0 & X-30 \end{vmatrix} \\ &= X(X-30)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\lambda = 0$ (valeur propre simple) et $\mu = 30$ (valeur propre double).

- c) On voit simplement que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc on peut prendre

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notamment, comme 0 est valeur propre simple de A , $E_0(A)$ est une droite vectorielle, dirigée par $\vec{e}_3$. Par le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont orthogonaux et en somme directe, donc $E_{30}(A) = E_0(A)^\perp$, donc $E_{30}(A)$ a pour équation $x + y + z = 0$.

On peut donc prendre

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{30}(A).$$

On a alors un seul choix pour $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ sont orthogonaux et unitaires, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, par construction.

Immédiatement, $\vec{e}_2 \in E_{30}(A)$.

On a donc bien construit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A .

- Q4.** a) En notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, soit

$$P = \text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

on a par la relation de changement de base :

$$X_i = P X'_i.$$

Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée, P est une matrice orthogonale, donc P est inversible et $P^{-1} = P^\top$, ce qui donne :

$$X'_i = P^\top X_i.$$

- b) On a $\overrightarrow{\Omega M_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{O\Omega}$, ce qui donne :

$$X''_i = X'_i - \omega = P^\top X_i - \omega.$$

- c) Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_2$, comme M_i a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) , son projeté orthogonal sur l'axe du cylindre $\Omega\vec{e}_3$ a pour coordonnées $(0, 0, z_i)$. Ainsi,

$$d_i = \sqrt{(x_i'')^2 + (y_i'')^2}.$$

- Q5.** a) On a pour tout $R \in \mathbb{R}$,

$$f(R) = \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2R \sum_{i=1}^n d_i + nR^2.$$

Ainsi, f est un trinôme du second degré de coefficient dominant strictement positif, qui atteint un minimum en

$$R_* = -\frac{-2R \sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \bar{d} \geq 0.$$

On peut donc dresser le tableau de variations de f .

R	0	$\bar{d}$	$+\infty$
$f(R)$			

Remarquons que, si $\bar{d} = 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui ne change rien au problème étudié.

- b) La fonction f atteint un minimum en $\bar{d}$.

Ainsi, le rayon du cylindre circulaire droit le plus proche des points du nuage (au sens des moindres carrés) est la moyenne des distance des points du nuage à l'axe du nuage, c'est :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i.$$

- Q13.** a) La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = pq^{k-1}$, et $E(X) = \frac{1}{p}$.

- b) Si l'on observe des réalisations $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de X vérifiant

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 4,$$

alors comme $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{p}$, on estimera p par

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{1}{4}.$$

La formalisation et la justification de ce point sont hors programme.

- c) On cherche à déterminer le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de passage pour qu'une pièce ait au moins 90% de chances d'être finie au bout de ces n passages.

On résout l'inéquation $P(X \leq n) \geq \frac{9}{10}$. Or, comme X est à valeurs entières,

$$P(X \leq n) = 1 - P(X > n) = 1 - P(X \geq n+1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X \leq n) \geq \frac{9}{10} &\Leftrightarrow 1 - P(X \geq n+1) \geq \frac{9}{10} \\ &\Leftrightarrow P(X \geq n+1) \leq \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow q^n \leq \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow n \ln(q) \leq \ln \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Comme $\ln(q) = \ln(0,75) < 0$, on obtient

$$P(X \leq n) \geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,75)}.$$

L'énoncé donne $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,75)} \approx 8$, mais ne permet pas de comparer à 8 (en fait, cette valeur est strictement supérieure à 8).

Ainsi, si l'on réalise au moins 9 passages, on peut certifier que chaque pièce aura au moins 90% de chances d'être finie.

- Q14.** a) Si $X = n$, on observe un schéma de Bernoulli avec n répétitions d'une expérience aléatoire ayant une probabilité de « succès » de p_1 . Ici, le succès s'entend par « la pièce est rayée lors de l'usinage ».

Ainsi, conditionnellement à l'événement $[X = n]$, le nombre de rayures Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1)$.

Cela signifie que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P_{X=n}(Z = k) = \binom{n}{k} p_1^k q_1^{n-k}.$$

On a immédiatement $[Y = 0] = [Z = 0]$. Ainsi,

$$P_{X=n}(Y = 0) = \binom{n}{0} p_1^0 q_1^n = q_1^n.$$

- b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ (qui assure la convergence de la série écrite) :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n) P_{X=n}(Y = 0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} q_1^n \\ &= p q_1 \sum_{n=1}^{+\infty} (q q_1)^{n-1} \\ &= p q_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (q q_1)^n \\ &= \frac{p q_1}{1 - q q_1}. \end{aligned}$$

- c) Comme Y est à valeurs dans $\{0, 1\}$,

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{p q_1}{1 - q q_1} = \frac{1 - q q_1 - p q_1}{1 - (1 - p) q_1} = \frac{1 - (p + q) q_1}{1 - p + p q_1}.$$

On utilise enfin $p + q = 1$ et $1 - p = q$ pour obtenir :

$$P(Y = 1) = \frac{p_1}{p + q p_1}.$$

Le pourcentage de pièces rayées est donné par $P(Y = 1)$, c'est la probabilité qu'une pièce (tirée au hasard) soit rayée.

Avec $p_1 = 10^{-3}$, on peut négliger $q p_1$ par rapport à p , et donc écrire

$$P(Y = 1) \approx \frac{p_1}{p} = 4.10^{-3}.$$

Ainsi, environ 4‰ des pièces sont rayées.

De manière exacte, on a

$$P(Y = 1) = \frac{10^{-3}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} 10^{-3}} \times \frac{4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} = \frac{4}{1003} \approx 0,003988036...$$