

**CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES**

Colle 20

Du 23 mars 2026 au 27 mars 2026

Isométries vectorielles et matrices symétriques réelles dans un espace euclidien

Définition d'une isométrie vectorielle ou d'un endomorphisme orthogonal. Conservation du produit scalaire. Groupe orthogonal (attention la notion de groupe est hors programme). Conservation des bases orthonormales. Matrices orthogonales. Groupe orthogonal d'ordre n . Lien avec les bases orthonormales et les isométries vectorielles. Isométries positives, négatives. Groupe spécial orthogonal.

Description de $O(2)$.

Orientation d'un espace euclidien. Rotation d'angle θ dans le plan et rotation d'axe orienté et dirigé par $\vec{e}_1$ et d'angle θ dans l'espace. Attention, la classification des isométries de l'espace n'a pas été vue.

Symétries orthogonales (cas $n=2$ et $n=3$).

Une matrice M est une matrice de symétrie orthogonale si et seulement si $M^2 = I_n$ et $M^T = M$.

Théorème spectral—.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale. C'est-à-dire que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP = P^TAP$.

Warnung : la notion d'endomorphisme symétrique ou auto-adjoint n'est plus au programme en TSI2.

Know-how :

Sur les isométries vectorielles :

- 1) Savoir comment établir qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.
- 2) Comment montrer qu'un endomorphisme u de E euclidien est une isométrie.
- 3) Écrire la matrice d'une rotation plane d'angle θ ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une rotation plane dont on déterminera l'angle θ .
- 4) Écrire dans une base orthonormée la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan ou reconnaître dans une base orthonormée, la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera un vecteur unitaire.
- 5) Savoir décomposer toute rotation dans le plan en produit de deux symétries orthogonales par rapport à une droite.
- 6) Comment déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation r de E de dimension 3.
- 7) Savoir écrire analytiquement une symétrie orthogonale par rapport à une droite ou un plan dans l'espace à partir d'un vecteur unitaire de la droite ou d'un vecteur unitaire orthogonal au plan.
- 8) Reconnaître qu'une matrice est symétrique réelle donc diagonalisable puis la diagonaliser et enfin trouver une base orthonormale de vecteurs propres (en s'aidant éventuellement de **l'algorithme de Gram-Schmidt**)