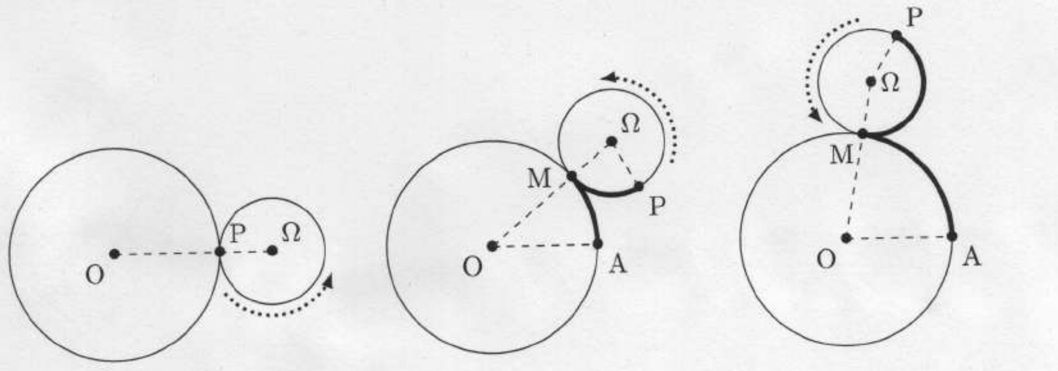
Devoir libre TSi2

correction

1.) Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon 1/2 qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarquera que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MP}$.



On pose $\theta_1 = (\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}})$ et $\theta_2 = (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}})$. La longueur d'un arc est le rayon x angle. Donc la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est $1 \times \theta_1$ et la longueur de l'arc $\widehat{MP}$ est $\frac{1}{2} \times \theta_2$ $\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\theta_2$

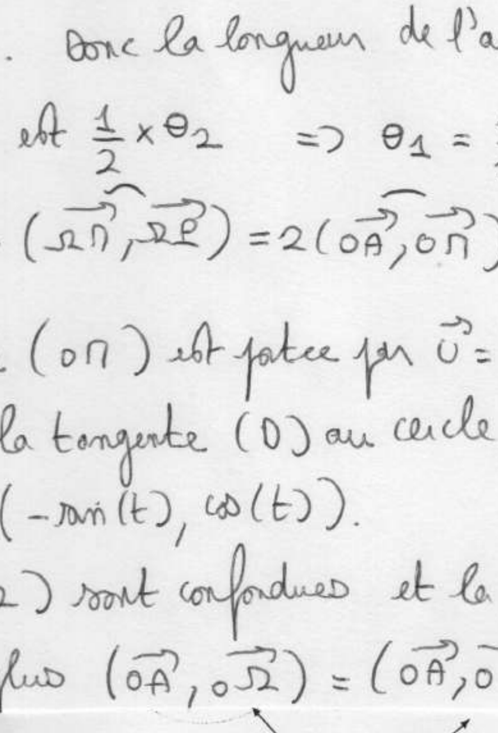
$$\Rightarrow \theta_2 = 2\theta_1 \Rightarrow (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}}) = 2(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}})$$

2.) On remarque que la droite (OM) est portée par $\vec{u} = (\cos(t), \sin(t))$ et est orthogonale à la tangente (D) au cercle $\mathcal{C}$ au pt M, tangente portée par $\vec{v} = (-\sin(t), \cos(t))$.

Les droites (OM) et $(M\Omega)$ sont confondues et la distance $O\Omega$ vaut $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. De plus $(\vec{OA}, \vec{O\Omega}) = (\vec{OA}, \vec{OM}) = t$.

$$\Rightarrow \vec{O\Omega} = \frac{3}{2}\vec{OM}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}\right).$$



3. Pour montrer que le repère $\mathscr{P}= (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal, il faut démontrer que

$$\left\langle \vec{u}; \vec{u} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \vec{v}; \vec{v} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \vec{u}; \vec{v} \right\rangle = 0;$$

où $\langle\ ;\ \rangle$ désigne le produit scalaire faisant de $\mathscr{R}$ un repère orthonormal (implicitement d'après l'énoncé le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$).

On se ramène donc au coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathscr{R}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par un calcul en coordonnées que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{u}; \vec{u} \right\rangle &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \\ \left\langle \vec{v}; \vec{v} \right\rangle &= \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1 \\ \left\langle \vec{u}; \vec{u} \right\rangle &= -\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi le repère $\mathscr{P}$ est bien orthonormé.

4. On veut montrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2} \right).$$

On sait déjà que $\Omega P = \frac{1}{2}$. Calculons l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right)$.

Notons tout d'abord que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = \pi$ car les points O, M et Ω sont alignés (d'après la question 2).

Ensuite. d'après la question 1 et l'énoncé l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = 2t$. Donc l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega P}\right)$ mesure

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}\right) = \pi + 2t.$$

On sait par ailleurs que

$$\cos(\pi + 2t) = -\cos(2t) \quad \text{et} \quad \sin(\pi + 2t) = -\sin(2t).$$

On en déduit donc que les coordonées de P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(\frac{1}{2}\cos(\pi + 2t), \frac{1}{2}\sin \pi + 2t \right) = \left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2} \right).$$

5. Comme les coordonnées de N dans le repère $\mathscr{P}= (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ sont (X, Y), ces coordonnées (x', y') dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ valent

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

car le vecteur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) est obtenu à partir du vecteur $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) par la rotation d'angle t qui s'exprime matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

De là, on obtient les coordonnées de N dans le repère $\mathscr{R}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OM}$ (d'après la question 2). On a ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. D'après la question 4, les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ sont
$$(X,Y) = \left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin 2t}{2}\right).$$

D'après la question précédente les coordonnées (x,y) du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont données par
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

On calcule donc :
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(-\cos t\cos(2t) + \sin t\sin(2t)\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(-\sin t\cos(2t) - \cos t\sin(2t)\Big) \end{cases}$$
Ce qui donne en développant les $\cos(2t)$ et les $\sin(2t)$:
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(-\cos t(2(\cos t)^2 - 1) + 2(\sin t)^2\cos t\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(-\sin t(1 - 2(\sin t)^2) - 2(\cos t)^2\sin t\Big) \end{cases}$$
puis
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(-\cos t(2(\cos t)^2 - 1) + 2(1 - (\cos t)^2)\cos t\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(-\sin t(1 - 2(\sin t)^2) - 2(1 - (\sin t)^2)\sin t\Big) \end{cases}$$
et en simplifiant
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\Big(-\cos t(4(\cos t)^2 - 3)\Big) \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\Big(\sin t(-3 + 4(\sin t)^2)\Big) \end{cases}$$
Enfin on obtient que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont données par
$$\begin{cases} x = 3\cos t - 2(\cos t)^3 \\ y = 2(\sin t)^3 \end{cases}$$
ce qui est bien l'expression demandée.

Partie B - Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée.

1. Comme les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$x(t + 2\pi) = 3\cos(t + 2\pi) - 2(\cos(t + 2\pi))^3 = 3\cos(t) - 2(\cos(t))^3 = x(t)$$
et
$$y(t + 2\pi) = 2(\sin(t + 2\pi))^3 = 2(\sin(t))^3 = y(t).$$
Ainsi les fonctions x et y sont 2π-périodiques.

2. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$. On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned} P(t + \pi) &= (x(t + \pi), y(t + \pi)) \\ &= (3\cos(t + \pi) - 2(\cos(t + \pi))^3, 2(sin(t + \pi))^3) \\ &= (-3\cos(t) + 2(\cos(t))^3, -2(sin(t))^3) \\ &= (-x(t), -y(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, le point $P(t+\pi)$ est obtenu à partir du point $P(t)$ par la symétrie centrale de centre O. Les fonctions x et y étant 2π-périodiques, on étudie la courbe $\mathcal{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\pi, \pi]$. On en déduit qu'il suffit d'étudier $\mathcal{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Du fait que la fonction cos est paire et la fonction sin impaire, on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(-t) &= (x(-t), y(-t)) \\ &= (3\cos(-t) - 2(\cos(-t))^3, 2(sin(-t))^3) \\ &= (3\cos(t) - 2(\cos(t))^3, -2(sin(t))^3) \\ &= (x(t), -y(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, le point $P(t+\pi)$ est obtenu à partir du point $P(t)$ par la symétrie d'axe $(O, \vec{i}$, l'axe des abscisses. D'après le travail précédent, on étudie la courbe $\mathcal{N}$ pour les points de paramètres $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On déduit de la symétrie ci-dessus qu'il suffit d'étudier $\mathcal{N}$ pour les points de paramètres $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Les fonctions x et y sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ car sommes et produits de fonctions trigonométriques. On a pour $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x'(t) = -\sin t(3 - 6(\cos t)^2)$$

et

$$y'(t) = 6(\cos t)(\sin t)^2.$$

Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$

on en déduit le tableau de variations conjoint de x et y :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$+$	0	$-$	-3
y'	0		$+$		0
x	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	2

On a ici calculé :

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 3\cos(0) - 2\cos(0)^3 = 3 - 2 = 1\\
x(\frac{\pi}{4}) &= 3\cos(\frac{\pi}{4}) - 2\cos(\frac{\pi}{4})^3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}\\
x(\frac{\pi}{2}) &= 3\cos(\frac{\pi}{2}) - 2\cos(\frac{\pi}{2})^3 = 0\\
x'(0) &= -\sin(0)(3 - 6(\cos(0))^2) = 0\\
x'(\frac{\pi}{4}) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(3 - 6\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - 6\frac{2}{4}) = 0\\
x'(\frac{\pi}{2}) &= -\sin(\frac{\pi}{2})\left(3 - 6\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)^2\right) = -3\\
y(0) &= 2\sin(0)^3 = 0\\
y(\frac{\pi}{4}) &= 2\sin(\frac{\pi}{4})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
y(\frac{\pi}{2}) &= 2\sin(\frac{\pi}{2})^3 = 2\\
y'(0) &= 6\cos(0)\sin(0)^2 = 0\\
y'(\frac{\pi}{4}) &= 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 6\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\\
y'(\frac{\pi}{2}) &= 6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

On a aussi remarqué que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$
\begin{aligned}
x'(t) \geqslant 0 &\iff -\sin(t)(3 - 6\cos(t)^2) \geqslant 0\\
&\iff 1 - 2\cos(t)^2 \leqslant 0 && \text{car } -\sin(t) \leqslant 0\\
&\iff \sin(t)^2 - \cos(t)^2 \leqslant 0\\
&\iff -\cos(2t) \leqslant 0\\
&\iff 2t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\
&\iff t \left]0, \frac{\pi}{4}\right].
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire en tenant compte des calculs précédents

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x'(t) \geqslant 0 \iff t \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$$

On peut remarquer que $M(t = \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et en ce point la tangente est verticale.
En $M(t = \frac{\pi}{2}) = (0, 2)$, la tangente est horizontale.
En $M(t = 0) = (1, 0)$, on a un point stationnaire.
La symétrie nous donne la nature du point stationnaire mais faisons la règle de $(1, q)$ pour le training.

Faisons un DL de $x(t)$ et de $y(t)$ à l'ordre 4.

$$x(t) = 3\cos t - 2(\cos t)^3 = 3\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right) - 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right)^3$$

$$= 3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - 2\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{3} + o(t^4)\right)\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right)$$

$$= 3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - 2\left(1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{12}t^4 + o(t^4)\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{25}{24}t^4 + o(t^4).$$

$$y(t) = 2(\sin t)^3 = 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^3 = 2t^3\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)\right)^3$$

$$\Rightarrow y(t) = 2t^3 + o(t^4)$$

Ici $\overrightarrow{M(t=0)M} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)t^2 + (0, 2)t^3 + \left(-\frac{25}{24}, 0\right)t^4 + t^4\vec{\varepsilon}(t)$

et comme $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow p = 2$ et $q = 3$. On a un pt de rebroussement de 1ère espèce porté par $\vec{i}$.