Devoir libre N°01

2TSI-MATHÉMATIQUES

A rendre le jeudi 14 septembre 2017 au plus tard

Les différents exercices sont indépendants.

EXERCICE 01

Soit t un paramètre réel, on considère dans tout le problème l'équation (d'inconnue Z) :

$$(1) \quad Z^2 - 2(1 + 2\cos t + 2i\sin t)Z - 3 = 0.$$

De même, on définit l'équation (d'inconnue Z) :

$$(2) \quad Z^2 - 2(1 + 2\cos t - 2i\sin t)Z - 3 = 0.$$

1. Déterminer les solutions de (1) :
   (a) dans le cas où $t = 0$.
   (b) dans le cas où $t = \pi$.
2. On veut déterminer les valeurs de t pour lesquelles les solutions de (1) sont réelles.
   (a) Vérifier que si Z est solution de (1), $\bar{Z}$ est solution de (2).
   (b) Montrer que si Z est solution réelle de (1) alors Z est aussi solution de (2).
   (c) En déduire que si Z est solution réelle de (1) alors $\sin t = 0$ nécessairement.
   (d) On suppose $t = k\pi$, où k est un entier relatif. Calculer les solutions de (1) en fonction de k et vérifier qu'elles sont toutes réelles. Sont-elles toujours distinctes ?

On revient au cas général. Dans la suite du problème on note Z' et Z'' les solutions (éventuellement non réelles de (1).

3. On appelle P ***le point d'affixe*** $\frac{1}{2}(Z' + Z'')$.
   (a) Soit l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$, à coefficients a, b et c complexes avec $a \neq 0$. Démontrer que si Z_1 et Z_2 sont les deux solutions complexes (et non nécessairement distinctes) de cette équation, alors :
   $$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } Z_1 Z_2 = \frac{c}{a}.$$
   (b) Démontrer alors sans calculer explicitement Z' et Z'' que P a pour affixe $1 + 2\cos t + 2i\sin t$.
   (c) En déduire que P décrit un cercle suivant les valeurs de t. On donnera le centre et le rayon de ce cercle.
4. ***On note Δ le discriminant de*** (1).
   (a) Exprimer Δ sous forme d'un produit d'un réel et de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur.
   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $Z' = Z''$.
   (c) On suppose ici $1 + 2\cos t > 0$. Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \Delta$.
   En déduire les expressions de Z' et de Z''.
   (d) Reprendre la question précédente avec $1 + 2\cos t < 0$.

T.S.V.P →

5. On pose dans cette question $Y' = Z' - 3$ et $Y'' = Z'' - 3$.
   (a) Montrer que si $1 + 2\cos t > 0$ alors Y' et Y'' ont le même module.
   (b) ***On suppose maintenant que*** $1 + 2\cos t < 0$.
      i. Montrer que l'on peut écrire Y' et Y'' sous la forme
      $$2e^{i\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}A(t) \text{ et } 2e^{i\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}B(t),$$
      où $A(t) = 2\sin\dfrac{t}{2} + \sqrt{-1-2\cos t}$ et $B(t) = 2\sin\dfrac{t}{2} - \sqrt{-1-2\cos t}$.
      ii. Montrer que le produit $A(t)B(t)$ vaut 3.
      iii. Conclure que Y' et Y'' ont le même argument.

EXERCICE 02

1. Calculer $\arcsin(\sin\alpha)$ et $\arccos(\cos\alpha)$ dans les cas suivants :
$$\alpha = \frac{59}{5}\pi,\ \alpha = \frac{84}{5}\pi,\ \alpha = \frac{76}{5}\pi.$$
(Il y a donc six calculs à faire.)
2. Ici ϕ est un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer successivement :
$$\cos 2\phi = \frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi},\ \sin 2\phi = \frac{2\tan\phi}{1+\tan^2\phi},\ \tan 2\phi = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}.$$
3. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On considère les fonctions définies sur E,
$$f_1 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ f_2 : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$
   (a) Déterminer la dérivée de f_1 sur $E \setminus \{0\}$.
   Dans la suite de cette question, on pose : $\phi = \arctan x$ **avec** $x \in E$.
   (b) Calculer, en fonction de la position de ϕ, sous forme de différentes fonctions affines, une expression de $g_1(\phi) = f_1(\tan\phi)$.
   (c) Procéder de même avec $g_2(\phi) = f_2(\tan\phi)$.
   (d) Soit $h : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$. On pose $g(\phi) = g_1(\phi) + g_2(\phi)$.
   En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression de $g(\phi)$ dans les cas suivants :
   $$\phi \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[,\ \phi \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[,\ \phi \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[,\ \phi \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$
   En déduire l'expression de h (en fonction de x).