

CLASSE DE 2TSI

PREPARATION PLANCHES ORAUX

Planche 01. CCS 2019

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ en fonction de $a > 0$.

Remarque : dans le cas où d'Alembert coince, on usera de la formule de James Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Planche 02. CCS 2019

Ici, la fonction f est continue sur $J \subset \mathbb{R}$, F est une primitive de f et enfin, u et v sont deux fonctions de classe C^1 de I dans J .

1. Montrer que $H : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est de classe C^1 sur I et donner sa dérivée.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $G : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $G'(x)$.
4. Calculer $\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$, $\int_0^b \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$, où $b > 0$ fixé puis $\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$.

Planche 03. CCS 2019

On pose $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \text{Tr}(M) I_n$ et $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M - 2\phi(M)$.

1. Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\text{Im } \phi = \text{Vect } I_n$ et que $\dim \text{Ker } \phi = n^2 - 1$.

Dans la suite, on suppose $n = 2$.

3. Montrer que ψ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ψ est-il diagonalisable ?

4. Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^T A P$ soit diagonale.
5. Déterminer $\text{Ker } \psi$ et en déduire que ψ est bijective.

Planche 04. CCS 2019

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur droite $D : 2x = 6y = 3z$ puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à D .

Planche 05. CCINP 2019

1. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin x$.
2. Montrer que $x \ln x - \sin x \ln(\sin x) \sim \frac{x^3}{6} \ln x$ au voisinage de 0.

Planche 06. CCINP 2019

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 . Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer une base de $\text{Ker } A$ puis de $\text{Im } A$ puis montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme associé dans cette nouvelle base ?

Planche 07. CCINP 2019

Trouver les valeurs $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A_m = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis pour ces valeurs m , calculer A_m^n en fonction d'une matrice diagonale, pour $n \in \mathbb{N}$.

Planche 08. CCINP 2019

On note E l'ensemble des suites réelles de période $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+p} = u_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel contenant pour tout entier i , la suite U^i définie par $u_n^i = 1$ si $n - i$ est un multiple de p et $u_n^i = 0$ sinon.
2. Montrer que $(U^i)_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ est une famille libre.
3. Déterminer une base de E et donner sa dimension.

Planche 09. CCINP 2019

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^2 \sin^2 t}$ et $a_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^2 \sin^2 t}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$, $\sin t \leq t$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \frac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq u_n \leq a_n$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Planche 10. CCINP 2019

Soient X et Y deux v.a.r **indépendantes** telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n) = q^n p$, où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On pose aussi $S = X + Y$.

1. Donner l'ensemble image de $X + 1$, de $Y + 1$ et de S .
2. Montrer que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p puis donner $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Déterminer la loi de S .
4. Soit la v.a.r $I = \min(X, Y)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(I \geq k) = q^{2k}$ et en déduire la loi de I . Calculer $E(I)$ et $V(I)$.

Planche 11. CCS 2019

On place n boules dans n tiroirs numérotés et on note V_n (respectivement Y_n) le nombre de tiroirs vides (respectivement non vides).

1. Déterminer la loi de N_i qui est le nombre de boules dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir.
2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tiroir est vide ». Calculer $P(A_i)$.
3. On note $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$. Montrer : $V_n = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$.
4. Calculer $E(1_A)$ en fonction de $P(A)$ et en déduire l'espérance de V_n puis celle de Y_n .

Planche 12. CCINP 2018

Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

Planche 13. CCINP 2018

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n}$ à l'aide de $\int_0^{1/2} 2t \cos(t^2) dt$ et d'un développement en série entière.

Planche 14. CCINP 2018

X et Y sont deux v.a.r indépendantes qui suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose la matrice $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ en fonction de e^x et de e^{-x} .
2. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
3. Quelle est la probabilité que M admette 0 pour valeur propre ?
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Planche 15. CCINP 2018

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Planche 16. CCINP

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel. Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} \right).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que l'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et reconnaître f .
4. On suppose que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Planche 17. CCS 2017

1. Montrer que la suite de terme général $w_n = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^n t dt$ est bornée et que tous ses termes de rang impairs sont nuls.
2. En déduire la parité de $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n$ et minorer son rayon de convergence.
3. Montrer que (w_{2n}) est une suite décroissante et que $w_{2n+2} + w_{2n} = \frac{2}{2n+1}$.
4. Montrer que la suite (w_{2n}) tend vers 0 et que $w_{2n} \sim \frac{1}{2n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que la série $\sum_n (-1)^n w_{2n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Planche 18. CCS 2017

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^2y + \ln(1 + y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A = [-1, 1]^2$.
2. Montrer que f possède un point critique sur $B =]-1, 1[^2$.
3. $(0, 0)$ est-il un extremum de f ? (On pourra calculer $f(x, x^3)$).
4. Trouver le minimum et le maximum de f sur A .

Planche 19. CCINP

On pose $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer : $\forall k \geq 3, u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leq u_{k-1}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

Planche 20. CCINP

Soit la fonction $f : t \mapsto |\cos t|$.

1. Montrer que f est paire et π -périodique.
2. Donner la série de Fourier de f .
3. Calculer les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.

Planche 21. CCINP 2017

Calculer pour tout entier $n \geq 1$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Planche 22. CCINP 2018

On pose pour un entier n non nul fixé, $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle positive u_n pour laquelle $\phi_n(u_n) = 1$.
Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que $u_n(1 - u_n^n) = 1 - u_n$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée et en déduire sa limite.

Planche 23. CCINP 2018

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les deux équations

$$z^2 + \bar{z} - 1 = 0 \text{ et } z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0.$$

Planche 24. CCINP 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A . Est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?
2. On choisit $z = 2i$. Calculer les racines carrées de z et résoudre : $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
3. On choisit z de module 1. Donner les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Planche 25. CCINP 2017

1. Montrer que pour tout couple de réels (x, y) , $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Montrer que si $u_n > 0$ et $\sum_{n \geq 1} u_n^2$ converge alors $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge aussi.

Planche 26. CCINP

Soient Ma et Mb deux machines produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine Ma (respectivement Mb) produit 5 (respectivement 6) d'objets défectueux. Étant donné un objet défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine Ma ?

Planche 27. CCINP 2018

Soit f , de matrice $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal direct. Quelle est la nature de cette isométrie ?
2. Montrer que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est invariant par f .
3. Montrer que w est orthogonal à $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donner alors les caractéristiques de cette transformation f .

Planche 28. CCS 2018

On donne la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Calculer A_n^k pour tout entier k .

Planche 29. CCINP 2019

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$$

et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est régulière en tout point.
2. Soit $M_1 = (3, 0, 0)$. Trouver une équation cartésienne au plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par M_1 .

Planche 30. CCINP 2019

Étudier la courbe paramétrée $x(t) = t^2 - t$, $y(t) = t^4 - t^2$.

Planche 31. CCS 2018

Déterminer deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E(\mathbb{R})$ de (E) .

Planche 32

Soit la courbe paramétrée Γ définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = 3t^2$ et $y(t) = 2t^3$.

1. Étudier et tracer Γ .
2. Écrire une équation cartésienne de la tangente D_a à Γ en $M(a)$.
3. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à Γ .

Planche 33. CCINP 2022

Soit la courbe paramétrée Γ définie par les points $M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = (1 + \cos t) \cos t \text{ et } y(t) = (1 + \cos t) \sin t.$$

1. Soit $g : t \mapsto \cos^2 t - \sin^2 t + \cos t$.
 - (a) Étudier les variations de g sur $[0, \pi]$. On pose $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ tel que $\cos \alpha = -1/4$. (On ne demande pas de calculer α .)
 - (b) Montrer que $g(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \pi/3[$ et $g(t) < 0$ pour tout $t \in]\pi/3, \pi]$.
 2. Pourquoi peut-on réduire l'étude de Γ à $[0, \pi]$?
 3. Dresser le tableau de variation de x et de y pour $t \in [0, \pi]$
 4. Calculer $M'(\pi)$, $M''(\pi)$ et $M^{(3)}(\pi)$. En déduire l'allure de la courbe autour de $M(\pi)$.
 5. Déterminer la longueur de Γ .
 6. Tracer enfin Γ .
-

Planche 34. CCS 2019

Les trois questions sont indépendantes a priori

1. Convergence et calcul de $I_n = \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Convergence de $J = \int_2^{+\infty} \frac{t^{\ln t}}{(\ln t)^t} dt$?
3. Convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$?

Planche 35. CCS 2019

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$.

Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Planche 36. CCS 2023

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1. Allure de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_N tel que :

$$\forall x > 0, f^{(N)}(x) = P_N\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 37. CCINP 2023

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = nx + \frac{1}{1 + e^x}.$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et dériver deux fois. Montrer que $f_n''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$. En déduire les variations de f_n et ses limites.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution x_n sur $\mathbb{R}$. Montrer que $-\frac{1}{n} < x_n < 0$ et en déduire la convergence de la suite (x_n) . Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ et en déduire la nature de la série $\sum x_n$.

Planche 38. CCCINP 2021

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les surfaces

$$S_1 : x^2 + 2z^2 - 1 = 0 \text{ et } S_2 : y^2 + 3z^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer que $A_1(1, 1, 0)$ et $A_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ appartiennent aux surfaces.

On définit f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par : $f_1(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 1$ et $f_2(x, y, z) = y^2 + 3z^2 - 1$.

2. Montrer que f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer le gradient de f_1 et de f_2 en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les points réguliers de S_1 .
5. Déterminer les équations des plans tangents à S_1 et à S_2 en A_1 .

Planche 39. CCS 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable? Trigonalisable?
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer les puissances de A .

Planche 40

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Nature de l'endomorphisme ϕ canoniquement associé à A .

Planche 41. CCINP 2019

Nature de la série

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^n$$

avec k entier fixé de $\mathbb{N}$.

Planche 42. CCINP 2019

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et $f : M \mapsto AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose ici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $\text{Det } f$ en fonction de $\text{Det } A$ et montrer que f est un automorphisme si et seulement si A est inversible.

Planche 43. CCINP 2019

Développement en série entière et rayon de convergence de $t \mapsto \arctan\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$.

Planche 44. CCINP 2025

$X_1, \dots, X_n$ sont n v.a.r **indépendantes** qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = X \cdot X^T$

1. Déterminer la loi de $R = \text{Rg}(M)$.
2. Déterminer la loi de $T = \text{Tr}(M)$.
3. Calculer la probabilité que M soit une projection.

Planche 45. CCS 2025

On pose $P = \sum_k a_k X^k$ et $Q = \sum_k b_k X^k$ avec $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

(On remarquera que les sommes sont nécessairement finies.)

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $F_1 = \text{Vect}(1 - X)$. Déterminer $F_1^\perp$. A t-on $F_1 \oplus F_1^\perp = \mathbb{R}[X]$?
3. On pose $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$. Déterminer $F_2^\perp$. A t-on $F_2 \oplus F_2^\perp = \mathbb{R}[X]$?

Planche 46. CCS 2025

On pose $f(x) = 2 + \frac{2}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ puis $u_0 \geq 2$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
2. Variations de $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$.
3. Limites de g à ses bornes.
4. Montrer que $f(x) = x$ a une seule solution positive α .
5. Montrer : $\forall x \in [2, +\infty[, |f'(x)|$ est majorée.
6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
7. En déduire la convergence et la limite de (u_n) .

Planche 47. CCINP 2024

1. Définition puis dérivée de $\arctan$. Calculer $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et écrire le D.S.E de $\arctan$.
2. (a) Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan(x) dx$.
 (b) Montrer que $I = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)(n+1)}$.
 (c) Calculer $J = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ en utilisant la question 2 de la planche 02.

Planche 48. CCINP 2024

Résoudre :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

en posant $z = y'' - y$.

Planche 49. CCS 2024

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geq 1$.

1. Écrire une fonction Python $U(n)$ qui renvoie u_n .
2. On pose $f = \arctan$ dans la suite. Étudier f'' et calculer $M_2 = \max_{\mathbb{R}} |f''|$.
3. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $|f'(t) - 1| \leq M_2 t$.
4. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)M_2}{12n^3}$.

Planche 50. CCINP 2024

On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Vérifier que $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de P .
2. Trouver toutes les racines de P .

Planche 51. CCS 2024

On pose l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Déterminer toutes les solutions développables en série entière.
2. Préciser le rayon de convergence de ces solutions.

Planche 52. CCINP 2019

On pose $f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1-t} dt$.

1) Montrer que f est définie sur $] -\infty, 1[$. Calculer $f(0)$.

Déterminer le sens de variation de f .

3) Montrer : $\forall x \in] -\infty, 1[, 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{1-x}$.

Quelles sont les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Planche 53. CCS 2019

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\pi \ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$

1. Montrer l'existence de I_n et de J_n .
2. Exprimer I_n en fonction de J_n (en partant de I_n avec une intégration par parties).
3. Calculer $J_{n+1} - J_n$ puis J_1 et exprimer I_n . Calculer J_0 .

On rappelle que $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Planche 54. CCINP 2024

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément trois boules de cette urne et on note X, Y et Z les trois numéros tirés avec $X < Y < Z$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer $E(Y)$.

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Planche 55. CCINP 2023

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et F la primitive de f telle que $F(0) = 0$.

1. Montrer que la limite de F en $+\infty$ est finie. On ne cherchera pas sa valeur.
 2. Déterminer la parité de F et étudier les variations de F puis tracer l'allure de F .
 3. On pose dans la suite $G(x) = \int_0^1 f(tx) dt$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G(x) = \frac{F(x)}{x}$.
 4. Montrer que G est continue en 0 et que la limite de G en $+\infty$ vaut 0.
 5. Montrer que G est dérivable pour tout x non nul et calculer sa dérivée.
 6. Vérifier que G est dérivable en 0.
 7. Déterminer les variations de G .
 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xG'(x) + G(x) = f(x)$.
-