

CLASSE DE 2TSI

PREPARATION PLANCHES ORAUX

KORREKTUR

Planche 01. CCS 2019

Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ en fonction de $a > 0$.

On pose $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pour tout $n \geq 1$. On utilise d'Alembert,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} = a \frac{n^n}{(n+1)^n} = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. On applique un développement limité d'ordre n . On obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \exp\left(-n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = ae^{-1+o(1)},$$

quantité qui tend vers ae^{-1} quand n tend vers $+\infty$.

Alors, si $a \in]0, e[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ converge et si $a > e$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ diverge.

Si $a = e$, on ne peut pas conclure avec la règle de d'Alembert.

Utilisons la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors, pour n tendant vers $+\infty$, $u_n \sim \sqrt{2\pi n}$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge grossièrement.

Planche 02. CCS 2019

Ici, la fonction f est continue sur $J \subset \mathbb{R}$, F est une primitive de f et enfin, u et v sont deux fonctions de classe C^1 de I dans J .

1. Comme f est continue sur J , toutes ses primitives F sont de classe C^1 sur J puis l'on a : $H(x) = F(v(x)) - F(u(x))$, pour tout $x \in I$. La fonction H est la somme de composées de fonctions de classe C^1 sur I et est donc de classe C^1 sur I .

De plus, pour tout $x \in I$, $H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$, en remarquant que $F' = f$.

2. Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Cette fonction est dérivable et :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

En conclusion, g est constante et comme $g(1) = 2 \arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, on a bien le résultat demandé.

3. Posons $G : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$ avec $x > 0$. On applique le résultat de **1)** avec $I = J = \mathbb{R}_+^*$,

$u(x) = 1/x$ et $v(x) = x$, $f(t) = \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2}$. On remarque que f est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et que u et v

sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$G'(x) = 1 \times f(x) - \frac{-1}{x^2} \times f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{x^3 \arctan \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2}$. Et donc :

$$G'(x) = \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} - \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^3 \arctan \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2} = \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} + \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2}.$$

Il reste à appliquer la question 2).

$$G'(x) = \frac{x (\arctan x + \arctan \frac{1}{x})}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi x}{2(1+x^2)^2}.$$

4. • Calculons $I_1 = \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$.

On fait le changement de variable $w = t^2$ et donc $dw = 2t dt$.

$$I_1 = \int_0^x \frac{1}{2} \frac{dw}{(1+w)^2} dw = \left[-\frac{1}{2(1+w)} \right]_0^{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Calculons $I_2(X) = \int_0^X \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$, où $X > 0$ fixé.

On remarque que $t \mapsto -\frac{1}{2(1+t^2)}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$, ce qu'on a pu voir en calculant I_1 .

On pense donc à une intégration par parties.

$$I_2(X) = \int_0^X \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt = - \int_0^X \frac{-1}{2(1+t^2)} \times \frac{1}{1+t^2} dt + \left[\frac{-1}{2(1+t^2)} \times \arctan t \right]_0^X.$$

Cela donne : $I_2(X) = \int_0^X \frac{1}{2(1+t^2)^2} dt + \frac{-\arctan X}{2(1+X^2)}$. Il reste le calcul de $K(X) = \int_0^X \frac{1}{2(1+t^2)^2} dt$.

Alors : $2K(X) = \int_0^X \frac{t^2 + 1 - 1}{2(1+t^2)^2} dt = \int_0^X \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^X \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$.

Il reste à faire une ultime intégration par parties,

$$2K(x) = \arctan X - \left[- \int_0^X \frac{-1}{2(1+t^2)} dt + \left[\frac{t}{2(1+t^2)} \right]_0^X \right] = \frac{1}{2} \arctan X + \frac{X}{2(1+X^2)}.$$

Cela donne : $I_2(X) = \frac{1}{4} \arctan X + \frac{X}{4(1+X^2)} - \frac{\arctan X}{2(1+X^2)}$.

• Calculons $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$.

Il suffit de faire tendre X vers $+\infty$. On a : $I_2 = \frac{\pi}{8}$.

Remarque : La fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour valeur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.

Planche 03. CCS 2019

1. • Pour montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que si $a \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors on a l'égalité : $\phi(M + aN) = \phi(M) + a\phi(N)$.

$$\phi(M + aN) = \text{Tr}(M + aN) I_n = (\text{Tr}(M) + a\text{Tr}(N)) I_n = \text{Tr}(M) I_n + a \text{Tr}(N) I_n = \phi(M) + a\phi(N).$$

• Pour montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut comme précédemment montrer que si $a \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\psi(M + aN) = \psi(M) + a\psi(N)$. C'est très semblable. On peut aussi remarquer que $\psi = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} - 2\phi$ et est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par différence de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Il est clair que $\text{Im } \phi \subset \text{Vect } I_n$ et comme ϕ n'est pas l'endomorphisme nul, (car par exemple $\phi(I_n) = nI_n$), $\dim \text{Im } \phi \geq 1$ et comme $\dim \text{Vect } I_n = 1$, on a nécessairement : $\text{Im } \phi = \text{Vect } I_n$.

D'après le théorème du rang, $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \text{Im } \phi + \dim \text{Ker } \phi = n^2 = 1 + \dim \text{Ker } \phi$.

On a bien le résultat : $\dim \text{Ker } \phi = n^2 - 1$.

3. Dans la suite, on suppose $n = 2$. Déterminons la matrice B de ϕ dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Par exemple, $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$\phi(E_{1,1}) = \text{Tr}(E_{1,1}) I_2 = I_2 = E_{1,1} + E_{2,2}.$$

De même, $\phi(E_{1,2}) = \phi(E_{2,1}) = 0$ et $\phi(E_{2,2}) = E_{1,1} + E_{2,2}$. On a donc les colonnes de B et donc de A .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = I_4 - 2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme A est une matrice symétrique réelle, on sait que A (et donc ψ) est diagonalisable (et on peut choisir la base de vecteurs propres orthonormale).

4. On sait que l'on peut trouver une matrice P orthogonale telle que $P^T A P$ soit diagonale. En effet, P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à une base orthonormale de vecteurs propres. On va commencer par trouver les valeurs propres, on sait que $\text{Ker } \phi$ est de dimension $n^2 - 1 = 3$. Or,

$$M \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(M) = 0 \Leftrightarrow \psi(M) = M \Leftrightarrow M \in E_1(\psi).$$

Donc 1 est valeur propre associé à un sous-espace vectoriel propre de dimension 3. Comme $\text{Tr}(A) = 0$, on en déduit que -3 est une valeur propre simple.

Commençons par une base de ce sous-espace propre $E_{-3}(\phi)$. Si $M \in E_{-3}(\psi)$, alors

$$M - 2\phi(M) = -3M \Rightarrow \text{Tr}(M)I_2 = 2M.$$

Alors $M \in \text{Vect } I_2$. Comme $\dim \text{Vect } I_2 = 1$ et comme $\dim E_{-3}(\psi) = 1$, on a : $E_{-3}(\psi) = \text{Vect } I_2$. Une base de $E_{-3}(\psi)$ est (I_2) .

Pour $E_1(\psi)$,

$$M \in E_1(\psi) \Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 0.$$

Il suffit de trouver trois matrices (formant une famille libre) de trace nulle. On connaît déjà deux matrices $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$. Il suffit de prendre $E_{1,1} - E_{2,2}$ comme troisième matrice de la base. Comme les colonnes de P doivent être orthogonales, cela donne :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut aussi écrire le polynôme caractéristique de A qui est, après factorisation, $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$ puis résoudre les systèmes $AX = X$ et $AX = -3X$. Et retrouver une base orthogonale de $E_1(A)$ puis en déduire P .

Comme 0 n'est pas une valeur propre de A , $\text{Ker } \psi$ est réduit à la matrice nulle. Et donc comme ψ est un endomorphisme en dimension finie, on sait que ψ est bijective (car son noyau est nul).

Planche 04. CCS 2019

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, pour déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D : 2x = 6y = 3z$, on commence par déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite $D : 2x = 6y = 3z$. La droite D est l'ensemble des triplets $(x, y, z) = (3y, y, 2y) = y(3, 1, 2)$. Si l'on pose $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, 2)$, une base orthonormée de D est donc : $(\vec{n})$. On sait que si p est la projection orthogonale sur D ,

$$p((x, y, z)) = ((x, y, z) \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{14}(3x + y + 2z)(3, 1, 2).$$

La matrice P de p est dans la base canonique : $P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

On sait que si s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D et si $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{1}{2}(s(\vec{u}) + \vec{u}) = p(\vec{u}) \Rightarrow s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}.$$

Ainsi, si Q est la matrice de la symétrie cherchée,

$$Q = 2P - I_3 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} - I_3 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Planche 05. CCINP 2019

1. On a immédiatement : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

$$\begin{aligned} 2. \quad x \ln x - \sin x \ln(\sin x) &= x \ln x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \ln \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x \ln x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x + \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) \\ &= x \ln x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(\ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= x \ln x - x \ln x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} \ln x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} \ln x + o(x^3). \end{aligned}$$

On en déduit : $\frac{x \ln x - \sin x \ln(\sin x)}{\frac{x^3}{6} \ln x} = \frac{1}{\ln x} + 1 + \frac{6o(x^3)}{x^3 \ln x}$. Les quantités $\frac{1}{\ln x}$ et $\frac{6o(x^3)}{x^3}$ tendent vers 0 quand x tend vers 0^+ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - \sin x \ln(\sin x)}{\frac{x^3}{6} \ln x} = 1 \Rightarrow x \ln x - \sin x \ln(\sin x) \sim \frac{x^3}{6} \ln x.$$

Planche 06. CCINP 2019

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Rapidement, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$ et A est la matrice (dans la base canonique) d'une projection vectorielle.

2. • Commençons par le noyau $\text{Ker } A$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \text{Ker } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

• D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } A = 1$ entraîne $\dim \text{Im } A = 2$. Comme $\text{Im } A$ est engendré par ses vecteurs colonnes C_1 , C_2 et C_3 , $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ car C_1 et C_2 sont libres et forment donc une base du plan vectoriel $\text{Im } A$.

• Pour montrer que $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ forment deux espaces supplémentaires, on commence par remarquer que $\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ et donc il suffit de montrer que si $X \in \text{Ker } A \cap \text{Im } A$ alors X est la matrice colonne nulle. En effet, comme $X \in \text{Im } A$, X est une combinaison linéaire de C_1 et de C_2 et comme on voit rapidement que $AC_1 = C_1$ et $AC_2 = C_2$, alors $AX = X$. Et si $X \in \text{Ker } A$, $AX = 0$ et donc $X = 0$.

3. Si l'on pose $\mathcal{B}' = ((2, 1, 1), (-1, 0, -1), (1, 1, 1))$ alors la matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base canonique est $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Planche 07. CCINP 2019

On commence par déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{A_m}(t)$ de A_m .

$$\chi_{A_m}(t) = \begin{vmatrix} t-m-1 & -m-1 & -1 \\ m & t+m & 1 \\ -m & -m+1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & t-1 & 0 \\ m & t+m & 1 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & t+m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ en faisant les opérations élémentaires } L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow L_2 + L_3.$$

Puis l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ donne :

$$\chi_{A_m}(t) = (t-1)(t+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1).$$

Le spectre de A_m est $\{-1, 1\}$ et A_m est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A_m) = 2$.

$$\text{Alors : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A_m) \Leftrightarrow A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x + (m+1)y + z = x \\ -mx - my - z = y \\ mx + (m-1)y = z \end{cases}.$$

Il ne reste que deux équations : $\begin{cases} mx + (m+1)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$. Elles sont indépendantes si et seulement

si $m \neq 0$. Donc le seul cas où $\dim E_1(A_m) = 2$ est $m = 0$. Et dans ce cas, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A_0)$ si et seulement

si $y + z = 0$. Une base est $((1, 0, 0), (0, 1, -1))$.

• Pour exprimer A_0^n en fonction d'une matrice diagonale, pour $n \in \mathbb{N}$, il faut trouver la matrice de passage P à une matrice diagonale. Il reste à trouver une base de $E_{-1}(A_0)$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A_0) \Leftrightarrow A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. On trouve que $x = -y$ et $z = y$. Une base est $((-1, 1, 1))$. Finalement, l'endomorphisme associé à A_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice $D = \text{Diag}(1, 1, -1)$ dans la base $((1, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 1, 1))$.

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = PDP^{-1}$ et donc : $A_0^n = P \text{Diag}(1, 1, (-1)^n) P^{-1}$.

Planche 08. CCINP 2019

1. • Posons deux suites U et V dans E et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + av)_{n+p} = u_{n+p} + av_{n+p} = u_n + av_n = (u + av)_n.$$

Donc $U + aV \in E$.

• Pour tout entier i , $u_{n+p}^i = 1$ si et seulement si $n + p - i$ est un multiple de p et donc si et seulement si $n - i$ est un multiple de p et donc si et seulement si $u_n^i = 1$. Donc $U^i \in E$.

2. Montrons que $(U^i)_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ est une famille libre.

Supposons que $a_0 U^0 + a_1 U^1 + \dots + a_i U^i + \dots + a_{p-1} U^{p-1} = 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 u_n^0 + a_1 u_n^1 + \dots + a_i u_n^i + \dots + a_{p-1} u_n^{p-1} = 0$. (1)

Pour $n = 0$, $u_0^0 = 1$ et $u_0^i = 0$ pour $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Donc (1) devient $a_0 = 0$.

Pour $n = 1$, $u_1^1 = 1$ et $u_1^i = 0$ pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \setminus \{1\}$. Donc (1) devient $a_1 = 0$.

Ainsi de suite, jusqu'à $n = p-1$, $u_{p-1}^{p-1} = 1$ et $u_{p-1}^i = 0$ pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \setminus \{p-1\}$. Et donc $a_{p-1} = 0$. Ainsi $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ et notre famille est bien libre.

3. On peut remarquer qu'une suite U de E est parfaitement définie connaissant ses termes $u_0, \dots, u_{p-1}$.

Posons $V = \sum_{i=0}^{p-1} u_i U^i$ alors $v_j = u_j$ pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

En effet, pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ fixé, $U_j^i = \begin{cases} 1 & , \\ 0 & , \end{cases} \quad i = j \quad i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \setminus \{j\}$ et $v_j = \sum_{i=0}^{p-1} u_i U_j^i = u_j U_j^j = u_j$.

Enfin, comme $V \in E$, la donnée de $v_0, \dots, v_{p-1}$ détermine parfaitement V et donc $U = V$. Ainsi toute suite de E est une combinaison linéaire des suites de la famille $(U^i)_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ qui est donc une famille libre et génératrice de E , donc une base de E . Et il en découle que la dimension de E qui est le cardinal de cette famille est p .

Planche 09. CCINP 2019

1. Posons pour tout $t \in [0, \pi]$, $\phi(t) = t - \sin t$. On dérive, $\phi'(t) = 1 - \cos t \geq 0$. La fonction ϕ est croissante sur $[0, \pi]$, et $\phi(0) = 0$, donc $\phi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$.

2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^2 \sin^2 t}$. On a l'implication, pour tout $t \in [0, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin t \leq t \Rightarrow 1 + (n\pi)^2 \sin^2 t \leq 1 + n^2 \pi^2 t^2.$$

Alors : $a_n \geq \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^2 t^2}$. Posons le changement de variable $x = n\pi t$ dans la dernière intégrale. Cela donne :

$$a_n \geq \int_0^{n\pi^2} \frac{dx}{n\pi(1+x^2)} \Rightarrow a_n \geq \frac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi]$,

$$1 + (n\pi)^2 \sin t \leq 1 + (n\pi + t)^2 \sin t \leq 1 + (n\pi + \pi)^2 \sin t.$$

Et donc :

$$\frac{1}{1 + (n\pi)^2 \sin t} \geq \frac{1}{1 + (n\pi + t)^2 \sin t} \geq \frac{1}{1 + (n\pi + \pi)^2 \sin t}.$$

Il reste à intégrer de 0 à π . On tombe bien sur $a_n \geq u_n \geq a_{n+1}$.

4. Comme les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sont à termes positifs, on va utiliser les comparaisons de séries numériques. Posons $v_n = \frac{\arctan(n\pi^2)}{n\pi}$. Alors $n\pi v_n$ tend vers $\pi/2$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc $v_n \sim \frac{\pi}{2n\pi} = \frac{1}{2n}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est donc divergente.

Comme $a_n \geq v_n$ à partir de $n = 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est elle aussi divergente.

Enfin, comme $a_{n+1} \leq u_n$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est à son tour divergente.

Planche 10. CCS 2019

1. • Ensemble image de $X + 1$, c'est-à-dire $(X + 1)(\Omega)$.

On a : $\sum_{n=0}^{+\infty} pq^n = \frac{q}{1-p} = 1$ et donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Ensemble image de $Y + 1$, c'est-à-dire $(Y + 1)(\Omega)$.

De même, on a : $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Ensemble image de S , c'est-à-dire $S(\Omega)$.

Comme tout entier naturel est somme d'entiers naturels, $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. • Pour tout $k \in (X + 1)(\Omega)$, $P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = q^{k-1}p$. Donc $X + 1$ suit bien une loi géométrique de paramètre p . De même, $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p .

D'après le cours, $E(X + 1) = \frac{1}{p}$ et donc $E(X) = E(X + 1 - 1) = E(X + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = E(Y)$.

De même, $V(X + 1) = \frac{q}{p^2} = V(X) = V(Y)$.

3. Déterminer la loi de S signifie calculer $P(X + Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = n - k, Y = k) = \sum_{k=0}^n P(X = n - k)P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n q^{n-k} p q^k p = p^2 \sum_{k=0}^n q^n = (n+1)q^n p^2. \end{aligned}$$

4. • Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(I \geq k) = P(\min(X, Y) \geq k) = P((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = P(X \geq k)P(Y \geq k)$.

Puis $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} q^n p = 1 - p \frac{1-q^k}{1-q} = q^k$. Ainsi $P(I \geq k) = q^k q^k = q^{2k}$.

• Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(I = k) = P(I \geq k) - P(I \geq k+1) = q^{2k} - q^{2k+2} = q^{2k}(1 - q^2)$.

Remarque : Attention, I ne suit pas la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$ car $I(\Omega) = \mathbb{N}$.

• Il reste à calculer $E(I)$ et $V(I)$. On peut remarquer que I suit le même type de loi que X avec q^2 à la place de q et $1 - q^2$ à la place de p . Alors $E(I) = \frac{1}{1 - q^2} - 1 = \frac{q^2}{1 - q^2}$ et $V(I) = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}$.

Remarque : On peut calculer $E(I)$ et $V(I)$ directement pour ceux qui n'ont pas vu le lien avec la loi de X (ou de Y). Mais c'est bien plus long.

$$\text{Ainsi : } E(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(I = k) = (1 - q^2) \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{2k}.$$

$$\text{Or, pour tout } x \in]0, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Et } E(I) = (1 - q^2) \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} = \frac{q^2}{1 - q^2} \text{ en utilisant la formule précédente avec } x = q^2.$$

$$\text{Calculons maintenant } E(I^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(I = k) = (1 - q^2) \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^{2k}.$$

$$\text{Puis, pour tout } x \in]0, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$\text{On a alors : } \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$\text{Puis, } E(I^2) = (1 - q^2) \left(\frac{q^2}{(1 - q^2)^2} + \frac{2q^4}{(1 - q^2)^3} \right) = \frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{2q^4}{(1 - q^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Et enfin } V(I) &= E(I^2) - E^2(I) = \frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{2q^4}{(1 - q^2)^2} - \frac{q^4}{(1 - q^2)^2} \\ &= \frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{q^4}{(1 - q^2)^2} = \frac{q^2}{(1 - q^2)^2}. \end{aligned}$$

Planche 11. CCS 2019

1. On place n boules dans n tiroirs numérotés, on fixe i entre 1 et n et N_i est le nombre de boules dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir. Chaque boule atterrit dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir avec une probabilité $\frac{1}{n}$. Si l'on pose $N_i^{(j)}$ la v.a.r égale à 1 si la $j^{\text{ème}}$ boule est dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir et 0 sinon, $N_i(j)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$

et comme toutes les boules sont indépendantes, $N_i = \sum_{j=1}^n N_i^{(j)}$, les v.a.r sont indépendantes mutuellement

et donc N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

2. On note A_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tiroir est vide ». On a : $P(A_i) = P(N_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

3. On note $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$ et V_n le nombre de tiroirs vides, soit ω un événement,

$V_n(\omega) = k$ signifie que pour ω , k tiroirs sont vides et $n - k$ ont au moins une boule. Comme $1_{A_i}(\omega) = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ tiroir reste vide, $1_{A_i}(\omega) = 1$ pour les k tiroirs vides et $1_{A_i}(\omega) = 0$ pour les $n - k$ tiroirs non vides.

$\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)$ est donc une somme de k fois la valeur 1 et vaut k . C'est bien $V_n(\omega)$.

On a donc : $V_n(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}(\omega)$. Et cela pour tout $\omega \in \Omega$.

4. On a : $E(1_A) = 1 \times P(1_A = 1) + 0 \times P(1_A = 0) = P(1_A = 1)$. Or $(1_A(\omega) = 1) \Leftrightarrow (\omega \in A)$ et donc $P(1_A = 1) = P(A)$.

Et $E(V_n) = E\left(\sum_{i=1}^n 1_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n E(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = nP(A_1) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Puis $Y_n = n - V_n \Rightarrow E(Y_n) = n - E(V_n) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Planche 12. CCINP 2018

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. Alors $X'(t) = AX(t)$. Il reste à réduire A . Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2.$$

(On a développé selon la ligne L_2 .)

On remarque immédiatement que $E_4(A)$ est Vect $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Puis : $E_2(A)$ est formé des vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ c'est-à-dire vérifiant

le système $\begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2x - 3y + 4z = 2z \end{cases}$. On a donc $y = 0$ et $x = -z$, et $E_2(A)$ est Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Il est clair que comme $\dim E_2(A) + \dim E_4(A) = 2 < 3$, A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, A est trigonalisable. Il reste à se placer dans une base dont les deux premiers vecteurs sont ceux de la base de $E_4(A)$ et de la base de $E_2(A)$ et on complète par un vecteur simple, par exemple le second vecteur de la base canonique. (Il faut que les trois vecteurs choisis forment une famille libre.) La matrice

de passage de la base canonique à cette nouvelle base est alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice de

l'endomorphisme associé canoniquement à A dans cette nouvelle base est de la forme $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $T = P^{-1}AP$ et donc $PT = AP$.

$$PT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 1 \text{ et } a = -2.$$

Posons $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = PY(t)$, alors $Y'(t) = TY(t)$.

Cela donne le système différentiel : $\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1(t) - 2y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$

On commence par résoudre la dernière équation différentielle de ce système. Il existe $K_3 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = K_3 e^{2t}$.

La deuxième équation différentielle devient (1) $y_2'(t) - 2y_2(t) = K_3 e^{2t}$. L'équation homogène associée a pour solution $y_2(t) = K e^{2t}$. On applique la méthode de variation de la constante à (1) en posant $y_2(t) = K(t)e^{2t}$ et on a : $K'(t) = K_3$ ce qui donne $K(t) = K_3 t + K_2$

Et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = K_3 t e^{2t} + K_2 e^{2t}$.

La première équation différentielle devient (2) $y_3'(t) - 4y_1(t) = -2K_3 e^{2t}$. L'équation homogène associée a pour solution $y_3(t) = K e^{4t}$. On applique la méthode de variation de la constante à (2) en posant $y_3(t) = K(t)e^{4t}$ et on a : $K'(t) = -2K_3 e^{-2t}$ ce qui donne $K(t) = K_3 e^{-2t} + K_1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1(t) = K_3 e^{2t} + K_1 e^{4t}$.

$$\text{Alors } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_3 e^{2t} + K_1 e^{4t} \\ K_3 t e^{2t} + K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K_3 t + K_2) e^{2t} \\ K_3 e^{2t} \\ K_1 e^{4t} + (-K_3 t + K_3 - K_2) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Planche 13. CCINP 2018

- Calcul direct de $I = \int_0^{1/2} 2t \cos(t^2) dt$

On pose le changement de variable $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$ et $t \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow u \in [0, \frac{1}{4}]$.

$$\text{Alors } I = \int_0^{1/4} \cos(u) du = [\sin u]_0^{1/4} = \sin\left(\frac{1}{4}\right).$$

- Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n}$

On développe $\cos$ en série entière, on sait que $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ avec $x \in \mathbb{R}$ car le rayon de convergence est $+\infty$.

$$\text{On en déduit } \forall t \in \mathbb{R}, 2t \cos t^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2t(-1)^n t^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t^{4n+1}}{(2n)!}.$$

D'après le cours, on peut donc permuter $\sum$ et $\int$ et :

$$I = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t^{4n+1}}{(2n)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} \frac{2(-1)^n t^{4n+1}}{(2n)!} dt.$$

$$\text{Cela donne } I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{1/2} t^{4n+1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n)!} \left[\frac{t^{4n+2}}{4n+2} \right]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{2^{4n+2}}.$$

Comme $2^4 = 16$, on obtient finalement :

$$I = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n} = \sin\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n} = 4 \sin\left(\frac{1}{4}\right).$$

Planche 14. CCINP 2018

1. On a : $e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$ et $e^{-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j x^j}{j!}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Alors $e^x + e^{-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{x^j}{j!} + \frac{(-1)^j x^j}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^j) x^j}{j!}$. On décompose la somme pour j variant de 0 à $+\infty$ en deux sommes, la première avec j pair et la deuxième avec j impair. Comme $(-1)^j + 1 = 0$ pour j impair, la deuxième somme est donc nulle et $(-1)^j + 1 = 2$ pour j pair. Si l'on pose $k = 2j$,

$$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

De même, $e^x - e^{-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{x^j}{j!} - \frac{(-1)^j x^j}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^j) x^j}{j!}$. On décompose encore la somme pour j variant de 0 à $+\infty$ en deux sommes, la première avec j pair et la deuxième avec j impair. Comme $1 - (-1)^j = 0$ pour j pair, la première somme est donc nulle et $1 - (-1)^j = 2$ pour j impair. Si l'on pose $k = 2j + 1$,

$$e^x - e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. X et Y sont deux v.a.r indépendantes qui suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et donc $P(X = n) = P(Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout n entier naturel.

La matrice $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\text{Det } M = (-1)^X - (-1)^Y \neq 0$. Cela signifie que X et Y doivent être des entiers de parité contraire. La probabilité que M soit inversible est la probabilité de la réunion des deux événements disjoints $A = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k) \right] \cap \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1) \right]$ et

$B = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k + 1) \right] \cap \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k) \right]$. Comme X et Y suivent la même loi, la probabilité cherchée est $P(A) + P(B) = 2P(A)$. Par ailleurs, si l'on pose $C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)$ et $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1)$, comme

X et Y sont des v.a.r indépendantes, $P(A) = P(C \cap D) = P(C)P(D)$.

Finalement, la probabilité cherchée est $2P(C)P(D)$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } P(C) &= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} (e^{\lambda} + e^{-\lambda}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\lambda}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } P(D) &= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = 2k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} (e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda}). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } 2P(C)P(D) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda}) (1 + e^{-2\lambda}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-4\lambda}).$$

3. M admet 0 pour valeur propre si et seulement si M n'est pas inversible, sa probabilité est donc $1 - \frac{1}{2} (1 - e^{-4\lambda})$.

4. Comme $(-1)^X$ et $(-1)^Y$ valent ± 1 , il y a quatre cas à faire et dans chacun des cas, examiner si la matrice M est diagonalisable ou pas.

- $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_M(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = t^2$.

Ici 0 est une valeur propre double et si M est diagonalisable, M est alors semblable à la matrice nulle et est donc la matrice nulle, ce qui est absurde.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_M(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 + 1 = (t-1-i)(t-1+i)$.

Alors M a deux valeurs propres complexes non réelles distinctes et M est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$.

- $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_M(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 2$.

Alors M a deux valeurs propres réelles distinctes et M est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, car qui peut le plus peut le moins!

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_M(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 1 = t(t-2)$.

Alors M a deux valeurs propres réelles distinctes et M est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toujours aussi dans $\mathbb{C}$.

• Conclusion : M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ pour X à valeurs impaires et Y à valeurs paires ou pour X et Y simultanément à valeurs paires. Donc la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$ est

la probabilité de la réunion des deux événements disjoints $E = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k) \right] \cap \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k) \right]$ et

$B = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k + 1) \right] \cap \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k) \right]$. On procède comme plus haut.

La probabilité cherchée est $P(E) + P(B)$.

$$\begin{aligned} \text{Or } P(E) &= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)\right) P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k)\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k)\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = 2k)\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right) \\ &= \left(\frac{e^{-\lambda}}{2} (e^{\lambda} + e^{-\lambda})\right)^2 = \frac{1}{4} (1 + e^{-2\lambda})^2. \end{aligned}$$

Et comme $P(B) = P(A) = \frac{1}{4} (1 - e^{-4\lambda})$, cela donne :

$$P(E) + P(B) = \frac{1}{4} \left((1 - e^{-4\lambda}) + (1 + e^{-2\lambda})^2 \right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda}).$$

Remarque

On peut aussi remarquer que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si Y est à valeurs paires puisque les cas X à valeurs paires et X à valeurs impaires forment un système complet d'événements incompatibles et la probabilité que Y soit à valeurs paires est $e^{-\lambda} \left(\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} \right)$, ce qui donne le même résultat.

Enfin, comme M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ sauf pour le cas où X et Y sont à valeurs impaires simultanément. La probabilité que X et Y soient à valeurs impaires simultanément est la probabilité de l'événement $\left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k + 1) \right] \cap \left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1) \right]$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(\cup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k + 1)) P(\cup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1)) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k + 1) \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = 2k + 1) \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - e^{-2\lambda})^2. \end{aligned}$$

Et finalement, la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$ est $1 - \frac{1}{4} (1 - e^{-2\lambda})^2$.

Planche 15. CCINP 2018

- Existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$.

On pose $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$, la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \sim \frac{1}{t^3}$, quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que comme $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ (intégrale de Riemann convergente) avec $a > 0$, I existe.

- Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$.

On pose $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$ et l'on pose le changement de variable $t = \tan u$. Alors $u = \arctan t$ et $dt = (1 + \tan^2 u) du$.

$$I(X) = \int_0^{\arctan X} \frac{(1 + \tan^2 u)}{(1 + \tan^2 u)^{3/2}} du = \int_0^{\arctan X} \frac{du}{(1 + \tan^2 u)^{1/2}} = \int_0^{\arctan X} \cos u du.$$

En effet, $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ et comme $u = \arctan t \geq 0$ car $t \geq 0$, $(1 + \tan^2 u)^{-1/2} = \cos u$.

On a alors : $I(X) = [\sin u]_0^{\arctan X} = \sin(\arctan X)$. Il reste à faire tendre X vers $+\infty$ et alors $I(X)$ tend vers 1.

Remarque : on peut montrer (le faire) que $\sin(\arctan X) = \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$ et en faisant tendre X vers $+\infty$, on retombe sur 1.

Planche 16. CCINP

1. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on développe $f(\vec{x} + a\vec{y})$

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{x} + a\vec{y} + \langle \vec{x} + a\vec{y}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge (\vec{x} + a\vec{y}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} \right) + a \left(\frac{1}{2} \left(\vec{y} + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{y} \right) \right)$$

$$= f(\vec{x}) + af(\vec{y}).$$

2. D'après le cours, dans le plan orthogonal à $\vec{u}$, on peut choisir une famille orthonormale $(\vec{v}, \vec{w})$ telle que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}, \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}.$$

3. De plus, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$.

Alors $f(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{u} \right) = \frac{1}{2} (2\vec{u}) = \vec{u}$.

Puis $f(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\vec{v} + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{v} \right) = \frac{1}{2} (\vec{v} + \sqrt{3} \vec{w})$.

Enfin, $f(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left(\vec{w} + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{w} \right) = \frac{1}{2} (\vec{w} - \sqrt{3} \vec{v})$.

La matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$ et d'angle $\theta = \pi/3$.

4. Posons $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et prenons donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Trouvons les coordonnées de $f(\vec{x})$.

$$\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \right).$$

$$\sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} = (1, 1, 1) \wedge (x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1).$$

$$\text{Et } 2f(\vec{x}) = \vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) + \left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \right) + (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1)$$

$$= \left(\frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3, \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, -\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \right).$$

La matrice cherchée est $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Planche 17. CCS 2017

1. • La suite de terme général $w_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$ est bornée car $|\tan t|^n \leq 1$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan^n t| \, dt \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

• $w_{2n+1} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan^{2n+1} t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt = \int_0^0 \tan^{2n+1}(-u) (-du) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan^{2n+1} u \, du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt = 0. \text{ Ainsi, tous les termes de rang impairs sont nuls.}$$

2. • Pour commencer, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |w_n| |z|^n \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n.$$

Si $|z| < 1$, alors $|f(z)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{|z|^2}{1-|z|^2}$ et donc le rayon de convergence est au moins 1.

- D'après la question précédente, $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{2n} z^{2n}$ et $f(-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{2n} (-z)^{2n} = f(z)$ et f est paire.

3. • (w_{2n}) est une suite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n+2} - w_{2n} \leq 0$. Alors $w_{2n+2} - w_{2n}$ vaut :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t \, dt - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{2n+2} t - \tan^{2n} t) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t (\tan^2 t - 1) \, dt.$$

Comme $\tan^2 t \leq 1$ pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et comme $\tan^{2n} t \geq 0$ pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\tan^{2n} t (\tan^2 t - 1) \leq 0$, pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et il en est de même de $w_{2n+2} - w_{2n}$.

- Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n+2} + w_{2n}$. On commence comme plus haut, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $w_{2n+2} + w_{2n}$ vaut :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t \, dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t (\tan^2 t + 1) \, dt.$$

On fait le changement de variable $w = \tan t$ qui donne $dw = (1 + \tan^2 t) dt$. Et les nouvelles bornes sont -1 et 1 .

$$w_{2n+2} + w_{2n} = \int_{-1}^1 w^{2n} \, dw = \left[\frac{w^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{2n+1}.$$

- 4.** • Comme $n \mapsto w_{2n}$ est décroissante et à valeurs positives, elle converge vers une certaine quantité l . Comme $w_{2n+2} + w_{2n} = \frac{2}{2n+1}$, quand n tend vers $+\infty$, $2l$ tend vers 0 et donc $l = 0$.

- L'idée est de montrer que $2nw_{2n}$ tend vers 1. Partons de l'égalité trouvée à **3** et multiplions chaque membre par $(2n+2)$.

$$(1) \quad (2n+2)w_{2n+2} + 2nw_{2n} + 2w_{2n} = \frac{4n+2}{2n+1}.$$

Premier cas : $2nw_{2n}$ tend vers 0, alors le premier membre de (1) tend vers 0 et le second membre de (1) tend vers 2. Absurde.

Second cas : $2nw_{2n}$ tend vers $+\infty$, alors le premier membre de (1) tend vers $+\infty$ et le second membre de (1) tend vers 2. Absurde.

Troisième cas : $2nw_{2n}$ tend vers $m \neq 0$ alors le premier membre de (1) tend vers $2m$ et le second membre de (1) tend vers 2. Donc $m = 1$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nw_{2n} = 1 \Rightarrow w_{2n} \sim \frac{1}{2n}.$$

- 5.** La série $\sum_n (-1)^n w_{2n}$ est convergente car $n \mapsto w_{2n}$ décroît vers 0, d'après le critère des séries alternées. Par contre comme $|(-1)^n w_{2n}| = w_{2n} \sim \frac{1}{2n}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_{2n}$ n'est pas absolument convergente.

Planche 18. CCS 2017

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 y + \ln(1 + y^2)$ est définie et continue sur $A = [-1, 1]^2$ qui est une partie de $\mathbb{R}^3$ fermée et bornée et d'après le cours, possède un minimum et un maximum sur $A = [-1, 1]^2$.

2. $(x_0, y_0) \in B =]-1, 1[^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 y_0 = 0 \\ x_0^2 + \frac{2y_0}{1+y_0^2} = 0 \end{cases}.$$

Si $x_0 = 0$, alors $y_0 = 0$ et $(0, 0)$ est un point critique dans B .

Si $y_0 = 0$, alors on retrouve $x_0 = 0$ et le point $(0, 0)$.

3. Utilisons $f(x, x^3) = x^5 + \ln(1 + x^6) = g(x)$. La fonction g est dérivable sur $] -1, 1[$ et $g'(x) = 5x^4 + \frac{6x^5}{1+x^6}$. Alors g' s'annule pour $x = 0$ et pour $5 + \frac{5x}{1+x^6} = 0$.

Inutile de résoudre cette dernière équation dont les solutions sont nécessairement strictement négatives. Faisons plutôt un DL de g' au voisinage de 0. On a : $g'(x) = 5x^4 + 6x^5 + o(x^5)$ et donc $g'(x) \geq 0$ dans un voisinage de 0. Donc, toujours dans un voisinage de 0, g est croissante et $g(0) = 0$. donc g est négative dans un voisinage de 0^- et positive dans un voisinage de 0^+ . Plus concrètement, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x, x^3) < f(0, 0) = 0$ pour $x \in]-\varepsilon, 0[$ et $f(x, x^3) > 0$ pour $x \in]0, \varepsilon[$. Donc f ne présente pas d'extremum en $(0, 0)$.

4. On sait d'après la question précédente qu'un extremum ne peut être que sur les bords de A . On va donc faire quatre cas.

- Cas $x = -1$

Posons $h(y) = f(-1, y) = y + \ln(1+y^2)$ avec $y \in [-1, 1]$. La fonction h est dérivable et $h'(y) = 1 + \frac{2y}{1+y^2} = \frac{(1+y)^2}{1+y^2}$. Cette dérivée est positive ou nulle et h est donc croissante. Puis $h(-1) = -1 + \ln 2 < 0$ et $h(1) = 1 + \ln 2 > 0$. Le maximum est pour $y = 1$ donc en $(-1, 1)$ pour f de valeur $1 + \ln 2$.

- Cas $x = 1$

Posons encore $h(y) = f(1, y) = y + \ln(1+y^2)$ avec $y \in [-1, 1]$. On retombe sur un maximum pour $y = 1$ donc en $(1, 1)$ pour f de valeur $1 + \ln 2$.

- Cas $y = -1$

Posons $l(x) = f(x, -1) = -x^2 + \ln 2$ avec $x \in [-1, 1]$. La fonction l est dérivable et $l'(x) = -2x$. Cette dérivée est positive et donc l est croissante sur $[-1, 0]$ et elle est négative et donc l est décroissante sur $[0, 1]$. Puis $l(-1) = l(1) = -1 + \ln 2$ fournit le minimum (donc pour $x = \pm 1$) et f présente un minimum en $(-1, -1)$ et en $(1, -1)$ de valeur $1 - \ln 2$.

- Cas $y = 1$

Posons $m(x) = f(x, 1) = x^2 + \ln 2$ avec $x \in [-1, 1]$. La fonction m est dérivable et $m'(x) = 2x$. Cette dérivée est négative et donc m est décroissante sur $[-1, 0]$ et elle est positive et donc m est croissante sur $[0, 1]$. Puis $m(-1) = m(1) = 1 + \ln 2$ fournit le maximum (donc pour $x = \pm 1$) et f présente un maximum en $(-1, 1)$ et en $(1, 1)$ de valeur $1 + \ln 2$.

Planche 19. CCINP

1. On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^{3/2}}$, cette fonction est décroissante sur $[2, +\infty[$.

On sait que : $\forall k \geq 3, (k - (k-1))f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq (k - (k-1))f(k-1)$, ce qui donne :

$$\forall k \geq 3, f(k) \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leq f(k-1).$$

En posant $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geq 2$, on a bien le résultat demandé.

2. On écrit la double inégalité précédente pour k variant de $k = 3$ à $k = N$, où N est fixé ≥ 3 .

$$\text{Alors : } \sum_{k=3}^N u_k \leq \sum_{k=3}^N \int_{k-1}^k \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leq \sum_{k=3}^N u_{k-1}.$$

$$\text{Ce qui donne (avec Chasles) : } \sum_{k=3}^N u_k \leq \int_2^N \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leq \sum_{k=3}^N u_{k-1}.$$

Il reste à intégrer $I_N = \int_2^N \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}}$ en posant le changement de variable $x = \ln t$.

$$\text{On a : } I_N = \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{dx}{x^{3/2}} = \left[-2x^{-\frac{1}{2}} \right]_{\ln 2}^{\ln N} = -\frac{2}{\sqrt{\ln N}} + \frac{2}{\sqrt{\ln 2}}.$$

$$\text{On a alors : (1) } \forall N \geq 3, \sum_{k=3}^N u_k \leq -\frac{2}{\sqrt{\ln N}} + \frac{2}{\sqrt{\ln 2}} \leq \sum_{k=3}^N u_{k-1}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$ dans (1) et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^N u_k$ est majoré par $\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}$. Comme la série de terme général u_n est une série à termes positifs, on peut en conclure qu'elle est convergente.

Planche 20. CCINP

1. Montrons que f est paire et π -périodique.

Il suffit d'écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = |\cos(-t)| = |\cos t| = f(t) \text{ et } f(t + \pi) = |\cos(t + \pi)| = |-\cos t| = |\cos t| = f(t).$$

Pour le tracé, on vous fait confiance. Il suffit de tracer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\cos$ puis de faire la symétrie orthogonale par rapport à Oy puis on translate.

2. Pour déterminer la série de Fourier de f , il faut trouver les coefficients de Fourier. Comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n . • Calcul de a_0 .

On va intégrer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ici $T = \pi$ et :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt.$$

On a rapidement :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

• Calcul de a_n pour n non nul.

On va encore intégrer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ici $T = \pi$, $\omega = 2$ et :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(2nt) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos(2nt) dt.$$

On utilise : $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ et donc :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+1)t) + \cos((2n-1)t)) dt.$$

Cela donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)} + \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ce qui donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)} + \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{2n-1} \right).$$

Puis : $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

De même, $\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$.

Alors :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{2n-1} \right) = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S_f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos(2nt).$$

3. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos(2nt).$$

Si l'on applique avec $t = \pi/2$, on a : $\cos(2nt) = (-1)^n$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{-1}{2}.$$

Si l'on applique avec $t = 0$, on a : $\cos(2nt) = 1$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Pour la dernière somme, il faut utiliser l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(t) dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2}.$$

Puis : $\int_0^\pi \cos^2(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1) dt = \frac{\pi}{2}$. Alors :

$$\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Planche 21. CCINP 2017

Si C_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne, on fait successivement $C_n \leftarrow C_n - C_1$, $C_n \leftarrow C_n - C_2$, ..., $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$.

La dernière colonne n'a alors que des 0 sauf le dernier coefficient qui est $n - \sum_{k=1}^{n-1} k = n - \frac{n(n-1)}{2}$. Le déterminant obtenu est triangulaire inférieur et vaut :

$$(n-1)! \left(n - \frac{n(n-1)}{2} \right) = n! \frac{3-n}{2}.$$

Planche 22. CCINP 2018

1. • On pose pour un entier n non nul fixé, $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$. On se restreint à $x \in [0, +\infty[$. Comme

ϕ_n est une somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$, ϕ_n est croissante. De plus ϕ_n est continue par somme finie de fonctions continues. Et comme $\phi_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur réelle positive u_n pour laquelle $\phi_n(u_n) = 1$.

• Comme $\phi_1(x) = x$, $\phi_1(u_1) = 1 \Leftrightarrow u_1 = 1$ et comme $\phi_2(x) = x + x^2$,

$$\phi_2(u_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_2^2 + u_2 - 1 = 0 \\ u_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

2. Si $x \neq 1$, on a la formule : $\phi_n(x) = x \frac{1-x^n}{1-x}$ et comme $u_n \neq 1$ pour $n \geq 1$ (car sinon $\phi_n(1) = n = 1$), on écrit :

$$\phi_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n \frac{1-u_n^n}{1-u_n} = 1 \Leftrightarrow u_n(1-u_n^n) = 1-u_n.$$

Le cas $n = 1$ s'ajoute sans souci (on a alors $0 = 0$).

$$3. \bullet \text{ Partons de } \phi_n(u_n) = 1 \text{ et } \phi_{n+1}(u_{n+1}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_n + u_n^2 + \dots + u_n^n & = 1 \\ u_{n+1} + u_{n+1}^2 + \dots + u_{n+1}^n + u_{n+1}^{n+1} & = 1 \end{cases}$$

On fait la différence des deux égalités :

$$(1) \quad u_{n+1} - u_n + u_{n+1}^2 - u_n^2 + \dots + u_{n+1}^n - u_n^n + u_{n+1}^{n+1} = 0.$$

Rappelons la formule : $a^p - b^p = (a - b) \sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout entier p , $u_{n+1}^p - u_n^p = (u_{n+1} - u_n) \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+1}^k u_n^{p-k} = (u_{n+1} - u_n) A_p$, où $A_p = \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+1}^k u_n^{p-k}$.

Il reste à remplacer dans (1) et à mettre $u_{n+1} - u_n$ en facteur.

$$(2) \quad (u_{n+1} - u_n) (A_0 + A_1 + \dots + A_n) + u_{n+1}^{n+1} = 0.$$

Comme u_n et u_{n+1} sont strictement positifs, il en est de même de u_{n+1}^{n+1} et des quantités $A_0, \dots, A_n$. Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors le premier membre de (2) est strictement positif, ce qui est absurde. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

• La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc est convergente. De plus elle est bornée car convergente ou alors car $u_1 = 1$ majore cette suite.

Comme pour $n \geq 1$, $u_n \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$, en posant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, et en utilisant la relation de la question 2, on a : $l \times 1 = 1 - l$ et donc $l = 1/2$.

Planche 23. CCINP 2018

• Résolution dans $\mathbb{C}$ de : $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.

On pose $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Alors : $x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy - 1 = 0$. On sépare partie réelle et partie imaginaire. L'équation devient :

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 & = 1 \\ 2xy - y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x - 1 & = 0 \\ (2x - 1)y & = 0 \end{cases}$$

Si $y = 0$, $x^2 + x - 1 = 0$ et $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Si $x = \frac{1}{2}$, $-y^2 - \frac{1}{4} = 0$ et il n'y a pas de solution réelle.

En conclusion, $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), 0 \right), \left(\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), 0 \right) \right\}$.

• Résolution dans $\mathbb{C}$ de : $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

On pose $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Alors : $x^2 - y^2 + 2ixy + 2x - 2iy + 1 = 0$. On sépare toujours partie réelle et partie imaginaire. L'équation devient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 & = 0 \\ 2xy - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 & = 0 \\ 2y(x - 1) & = 0 \end{cases}$$

Si $y = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ et $x = -1$.

Si $x = 1$, $4 - y^2 = 0$ et $y = \pm 2$.

En conclusion, $S = \{(-1, 0), (1, 2), (1, -2)\}$.

Planche 24. CCINP 2017

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$. Donnons le polynôme caractéristique de A .

On écrit :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -z \\ -1 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Par exemple, on développe selon la première ligne et :

$$\chi_A(t) = (t-1)^3 - z(t-1) = (t-1)((t-1)^2 - z).$$

On pose δ et $-\delta$ les racines carrées de z .

- Alors si $z \neq 0$,

$$(t-1)^2 = z \Leftrightarrow t-1 = \pm\delta \Leftrightarrow t = 1 + \delta \text{ ou } t = 1 - \delta.$$

On a deux racines distinctes et donc le spectre a trois valeurs distinctes,

$$\text{Sp } A = \{1, 1 + \delta, 1 - \delta\}.$$

Donc A est alors diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

- Si $z = 0$, 1 est une valeur propre triple et alors si A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, A est semblable à I_3 donc égale à I_3 . C'est absurde car $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

2. On choisit $z = 2i$. Calculons les racines carrées de z .

On pose :

$$z = 2i = \delta^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi},$$

où k est un entier relatif. On pose alors $z = \rho e^{i\theta}$ et on trouve $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$. Alors :

$$\delta = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ou } \delta = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

, ce qui donne :

$$\delta = 1 + i \text{ ou } \delta = -1 - i.$$

Puis résolvons $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$.

On écrit :

$$t^2 - 2t + 1 - 2i = (t-1)^2 - 2i = 0.$$

Donc pas besoin de calculer le discriminant. On remarque que $t = 1 \pm \delta$. Il reste pour solutions de l'équation :

$$t = 1 + 1 + i = 2 + i \text{ et } t = 1 - 1 - i = -i.$$

Déterminons les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

Ici : $\text{Sp } A = \{1, 2 + i, -i\}$.

Pour les trois sous-espaces propres, il faut résoudre les trois systèmes :

$$AX = X, AX = (2 + i)X, AX = -iX,$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve un vecteur de base (car les dimensions sont toutes égales à 1). On vous laisse finir.

3. On choisit z de module 1. Donnons les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Ici $z = e^{i\theta}$ et donc il s'agit de résoudre : $(t-1)^2 = e^{i\theta}$.

Alors :

$$t = 1 + e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } t = 1 - e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On rappelle que $1 + e^{i\phi} = 2e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ et que $1 - e^{i\phi} = -2ie^{i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$.

Ici, on applique avec $\phi = \theta/2$.

On trouve :

$$t = 2e^{i\frac{\theta}{4}} \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \text{ et } t = -2ie^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{\theta}{4}\right).$$

Finalement,

$$\text{Sp } A = \left\{ e^{i0}, 2e^{i\frac{\theta}{4}} \cos\left(\frac{\theta}{4}\right), -2ie^{i\frac{\theta}{4}} \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) \right\}.$$

Ou encore :

$$\text{Sp } A = \left\{ e^{i0}, 2 \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) e^{i\frac{\theta}{4}}, 2 \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{4} + \frac{3\pi}{2})} \right\}.$$

Sous forme algébrique,

$$\text{Sp } A = \{1, 1 + i, 1 - i\}.$$

Planche 25. CCINP 2017

1. Pour tout couple de réels (x, y) , $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x - y)^2$.

2. Appliquons l'inégalité précédente avec $x = u_n$ et $y = 1/n$.

Pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$. Les séries $\sum_{n \geq 1} u_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergent et leur demi-somme aussi et comme $\frac{u_n}{n} \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

Planche 26. CCINP

Si D est l'événement « l'objet est défectueux » et M_a (resp. M_b) « l'objet est fabriqué par M_a (resp. M_b) », on calcule donc $P_D(M_a)$. On connaît déjà :

$$P(M_a) = \frac{1}{3}, P(M_b) = \frac{2}{3}, P_{M_a}(D) = \frac{5}{100} \text{ et } P_{M_b}(D) = \frac{6}{200}.$$

Alors :

$$P_D(M_a) = \frac{P_{M_a}(D)P(M_a)}{P(D)}.$$

Puis :

$$P(D) = P_{M_a}(D)P(M_a) + P_{M_b}(D)P(M_b) = \frac{5}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{200} \times \frac{2}{3} = \frac{110}{60 \times 50} = \frac{11}{150}.$$

Enfin :

$$P_D(M_a) = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{150}} = \frac{5}{22}.$$

Planche 27. CCINP 2018

1. Posons $B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, qui est l'expression de f dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. B est

une matrice orthogonale puisque ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. En effet, les produits scalaires des vecteurs colonnes pris deux à deux est nul et les normes des vecteurs colonnes (ne pas oublier de diviser par $1/81$) valent 1.

Puis le produit vectoriel des deux premiers vecteurs colonnes est égal à son troisième vecteur colonne, donc la base orthonormée formée des trois vecteurs colonnes est directe et $B \in \text{SO}(3)$.

Et en conclusion, f est une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

2. On connaît une méthode pour trouver un vecteur orienté de l'axe et l'angle correspondant de la rotation mais comme la suite propose une méthode, autant la suivre.

On assimile ici un vecteur $\vec{w}$ et son vecteur colonne W qui représente ses coordonnées dans la base canonique.

On a immédiatement $BW = W$ et donc l'axe de f est la droite vectorielle : $\Delta = \text{Vect}(3, -1, -1)$. Posons $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, -1, -1)$, pour avoir un vecteur unitaire. Alors l'axe de f est porté et orienté par $\vec{I}$.

3. Ici, on propose de prendre le vecteur $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est clairement unitaire et orthogonal à $\vec{I}$.

Posons : $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$, on crée ainsi une nouvelle base orthonormale directe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. On a :

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Dans $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, la matrice de f est la matrice réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On a : $f(\vec{J}) = \cos \theta \vec{J} + \sin \theta \vec{K} \Rightarrow \cos \theta = \langle f(\vec{J}), \vec{J} \rangle$ et $\sin \theta = \langle f(\vec{J}), \vec{K} \rangle$.

Alors les composantes de $f(\vec{J})$ sont :

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{J}) = \frac{1}{9\sqrt{10}}(11, 8, 25).$$

Puis : $\cos \theta = \left\langle \frac{1}{9\sqrt{10}}(11, 8, 25) \middle| \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0) \right\rangle = \frac{7}{18}$.

Et enfin : $\sin \theta = \left\langle \frac{1}{9\sqrt{10}}(11, 8, 25) \middle| \frac{1}{\sqrt{110}}(3, -1, 10) \right\rangle = \frac{275}{90\sqrt{11}} = \frac{55}{18\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{18}$.

En conclusion, $\theta = \arccos \frac{7}{18}$ et f est la rotation d'axe orienté par $\vec{I}$ et d'angle $\arccos \frac{7}{18}$.

Planche 28. CCS 2018

On remarque que $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} - I_n = B_n - I_n$.

Puis, on voit rapidement que $B_n^2 = nB_n$ puis $B_n^3 = n^2B_n$. Donc il semble que $B_n^p = n^{p-1}B_n$ pour tout $p \geq 1$. L'initialisation est faite. Pour la transmission, on écrit :

$$B_n^{p+1} = B_n^p B_n = n^{p-1} B_n^2 = n^{p-1} n B_n = n^p B_n.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n^k = (B_n - I_n)^k$. On peut développer avec la formule du binôme de Newton car B_n et $-I_n$ commutent. Pour la cohérence des formules, on suppose $k \geq 2$, (pour $k = 0$, on a $A_n^k = I_n$ et pour $k = 1$, $A_n^k = A_n$).

$$\begin{aligned} \text{Alors : } A_n^k &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B_n^p (-1)^{k-p} I_n^{k-p} = \binom{k}{0} (-1)^k I_n + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} B_n^p (-1)^{k-p} I_n^{k-p} \\ &= (-1)^k I_n + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} n^{p-1} B_n. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $B_n I_n^{k-p} = B_n$.

$$\text{Et donc : } A_n^k = (-1)^k I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{p=1}^k \binom{k}{p} n^p (-1)^{k-p} \right) B_n = (-1)^k I_n + \frac{1}{n} ((n + (-1))^k - (-1)^k) B_n.$$

Cela donne, en remplaçant B_n par $A_n + I_n$,

$$A_n^k = \frac{1}{n} ((n-1)^k - (-1)^k) A_n + \frac{1}{n} ((n-1)^k + (n-1)(-1)^k) I_n.$$

Planche 29. CCINP 2019

1. On considère $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$. $\mathcal{S}$ est régulière en tout point (x_0, y_0, z_0) si et seulement si le vecteur gradient en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à f est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$ est non nul, donc si et seulement si $(4x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 3) - 32x_0, 4y_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 3) - 32y_0, 4z_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 3))$ est non nul. Supposons par l'absurde que ce vecteur gradient soit nul, alors la troisième composante nulle entraîne que $z_0 = 0$ car $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 3$ ne peut pas s'annuler. Et les deux autres composantes nulles (en remplaçant z_0 par 0) deviennent :

$$\begin{cases} 4x_0(x_0^2 + y_0^2 + 3) - 32x_0 &= 0 \\ 4y_0(x_0^2 + y_0^2 + 3) - 32y_0 &= 0 \end{cases}$$

Si $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$, alors on a le point $(0, 0, 0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$.

Si $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$, alors $4x_0(x_0^2 + y_0^2 + 3) - 32x_0 = 0 \Rightarrow x_0^2 = 5$ et les points $(\sqrt{5}, 0, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0, 0)$ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$.

Si $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, alors $4y_0(x_0^2 + y_0^2 + 3) - 32y_0 = 0$ devient $y_0^2 = 5$ et les points $(0, \sqrt{5}, 0)$ et $(0, -\sqrt{5}, 0)$ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$.

Si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, alors $x_0^2 + y_0^2 = 5$ et pour que $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$, avec ici $z_0 = 0$, en remplaçant dans $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, on obtient $64 = 80$, et donc c'est encore impossible.

Bilan : il n'y a pas de points critiques.

2. On rappelle que si une surface $\mathcal{S}$ a pour équation $f(x, y, z) = 0$, alors le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à cette surface est :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Soit ici $M_0 = (3, 0, 0)$. On vérifie que $M_0 \in \mathcal{S}$ sans souci. Le vecteur gradient en M_0 est : $(48, 0, 0)$. Et l'équation est : $48(x - 3) = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.

Planche 30. CCINP 2019

Les fonctions $x : t \mapsto t^2 - t$ et $y : t \mapsto t^4 - t^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x'(t) = 2t - 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)$ et $y'(t) = 4t^3 - 2t = 4t\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La valeur qui annule x' est $1/2$ et celles qui annulent $y'(t)$ sont 0 et $\pm 1/\sqrt{2}$.

Ainsi $x'(t) < 0$ pour $t \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et $x'(t) > 0$ pour $t \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Et donc x est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Puis $y'(t) < 0$ pour $t \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $y'(t) > 0$ pour $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$, $y'(t) < 0$ pour $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $y'(t) > 0$ pour $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ et donc y est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$, décroissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

On remarque qu'il n'y a pas de point stationnaire.

Puis, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$.

On a par ailleurs, $x(-1/\sqrt{2}) = 1/2 + 1/\sqrt{2} \equiv 1.2$, $y(-1/\sqrt{2}) = -1/4$, $x(0) = y(0) = 0$, $x(1/\sqrt{2}) \equiv -0.2$, $y(1/\sqrt{2}) = -1/4$, $x(1/2) = -1/4$ et $y(1/2) \equiv -0.1875$.

De plus pour affiner le dessin, y s'annule pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = -1$ et donc franchit l'axe Ox en $M(t = -1)(2, 0)$, en $M(t = 0)(0, 0)$ et en $M(t = 1)(0, 0)$. Ainsi $(0, 0)$ est un point double.

En $M(t = -1/\sqrt{2})(1.2, -0.25)$, en $M(t = 0)(0, 0)$ et en $M(t = 1/\sqrt{2})(-0.2, -0.25)$, la tangente est horizontale et en $M(t = 1/2)(-0.25, -0.1875)$, la tangente est verticale.

Enfin, le rapport $y(t)/x(t) \sim t^2$ quand $t \pm \infty$ et donc la courbe présente une branche parabolique de direction Oy .

► **Tracé** : la courbe part du haut à droite (sous forme d'une branche parabolique de direction Oy) et descend vers la gauche en franchissant l'axe Ox en $M(t = -1)(2, 0)$ jusqu'au point $M(t = -1/\sqrt{2})(1.2, -0.25)$, où la tangente est horizontale. Puis elle continue vers la gauche en remontant et arrive par le dessous en $M(t = 0)(0, 0)$, où la tangente est horizontale. Puis la courbe descend toujours vers la gauche jusqu'au point $M(t = 1/2)(-0.25, -0.1875)$ où la tangente est verticale et continue de descendre mais vers la droite jusqu'au point $M(t = \sqrt{2})(-0.2, -0.25)$, où la tangente est horizontale et enfin la courbe remonte tout en allant vers la droite et franchit l'axe Ox en $M(t = 1)(0, 0)$ et termine par une nouvelle branche parabolique de direction Oy .

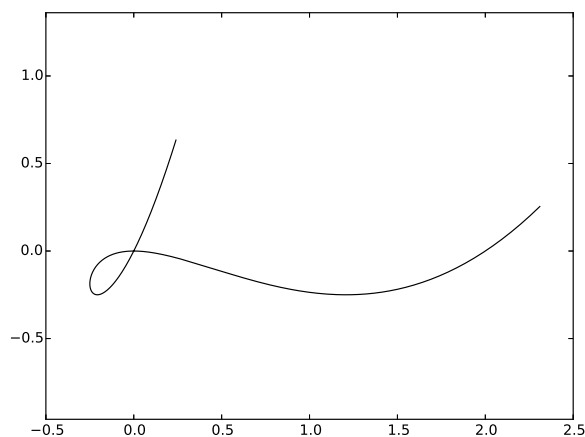


Planche 31. CCS 2018

Déterminons deux solutions particulières (non nulles) développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0.$$

Posons $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec un rayon de convergence R à déterminer plus tard. On utilise :

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \text{ pour } t \in]-R, R[.$$

Remplaçons dans $y''(t) + ty'(t) + y(t)$, cette expression devient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Un glissement d'indice dans la première somme et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \times t^n$, on identifie les coefficients de chaque membre (deux développements en série entière sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux) et alors pour $n = 0$, on a : $2a_2 + a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n = 0.$$

Cela donne : $(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0 \Rightarrow (n+2) a_{n+2} + a_n = 0$.

On remarque que $2a_2 + a_0 = 0$ se retrouve dans l'égalité précédente. Donc :

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}.$$

On pose $n = 2p$ et :

$$a_{2p} = \frac{-1}{2p} a_{2p-2} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} a_{2p-4} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} \times \dots \times \frac{-1}{2} a_0.$$

Donc :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0.$$

On fait de même pour $n = 2p + 1$. On a : $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1$.

Ainsi, pour tout $t \in]-R, R[$,

$$y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1 t^{2p+1}$$

Donc si l'on pose $y_{p_1}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} t^{2p}$ et $y_{p_2}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$, on a : $y(t) = a_0 y_{p_1}(t) + a_1 y_{p_2}(t)$.

On peut ensuite vérifier que les rayons de convergence de $y_{p_1}(t)$ et de $y_{p_2}(t)$ sont $+\infty$.

Il suffit de poser $u_p(t) = \frac{(-1)^p}{2^p p!} t^{2p}$ et $v_p(t) = \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} t^{2p+1}$.

Puis de faire les rapports $\left| \frac{u_{p+1}(t)}{u_p(t)} \right|$ et $\left| \frac{v_{p+1}(t)}{v_p(t)} \right|$ et de faire tendre p vers $+\infty$. On trouve 0 pour limite.

Ensuite, les deux fonctions $t \mapsto y_{p_1}(t)$ et $t \mapsto y_{p_2}(t)$ sont indépendantes et comme on sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimension 2, les solutions de cette équation sont exactement les combinaisons linéaires de $t \mapsto y_{p_1}(t)$ et de $t \mapsto y_{p_2}(t)$.

On peut remarquer que $y_{p_1}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Planche 32. CCINP2022

Soit la courbe paramétrée Γ définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = 3t^2$ et $y(t) = 2t^3$.

1. Étude et traçage de Γ . On remarque que x est pair et y est impair. Donc la courbe présente une symétrie orthogonale par rapport à Ox et on étudie pour $t \in \mathbb{R}^+$ seulement. Puis on voit rapidement que x et y sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et le point $M(0)$ est stationnaire. Comme $M''(0) = 6\vec{i}$ et $M^{(3)}(0) = 12\vec{j}$, le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce et la tangente est l'axe Ox . Le lecteur fera le tracé.

Écrivons une équation cartésienne de la tangente D_a à Γ en $M(a)$.

Le vecteur $(1, a)$ est colinéaire à $M'(a)$. Et $(x, y) \in D_a$ si et seulement si $\begin{vmatrix} x - 3a^2 & 1 \\ y - 2a^3 & a \end{vmatrix} = 0$.

On trouve $ax - y = a^3$.

3. Déterminons les droites à la fois tangentes et normales à Γ . Notons T_b la normale à Γ en $M(b)$.

Le vecteur $(-b, 1)$ est orthogonal à $(1, b)$ et $(x, y) \in T_b$ si et seulement si $\begin{vmatrix} x - 3b^2 & -b \\ y - 2b^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On trouve $x + by = 3b^2 + 2b^4$. Ainsi, comme la tangente en $M(a)$ est $x - \frac{1}{a}y = a^2$, il faut

$$b = -1/a \text{ et } a^2 = 3b^2 + 2b^4$$

On obtient $2b^6 + 3b^4 - 1 = 0$ et $b^2 = \frac{1}{a^2}$. On pose $X = b^2$ et $2X^3 + 3X^2 - 1 = 0$.

On remarque que $X = -1$ est solution et $2X^3 + 3X^2 - 1 = (X + 1)(2X^2 + X - 1) = 0$ et on trouve $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$.

Finalement, $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $a = \mp \sqrt{2}$.

Planche 33. CCINP 2022

Soit M la courbe paramétrée définie par : $x(t) = (1 + \cos t) \cos t$ et $y(t) = (1 + \cos t) \sin t$.

1-a Soit $g : t \mapsto \cos^2 t - \sin^2 t + \cos t$.

Étudions les variations de g sur $[0, \pi]$. On pose $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ tel que $\cos \alpha = -1/4$. (On ne demande pas de calculer α .)

$$g'(t) = -2 \cos t \sin t - 2 \sin t \cos t - \sin t = -\sin t(4 \cos t + 1).$$

Comme $t \in [0, \pi]$, $4 \cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \alpha$. On a : $g(\alpha) = -9/8$.

Donc comme $-\sin t < 0$ pour $t \in]0, \pi[$, $g'(t) < 0$ pour $t \in]0, \alpha[$ et $g'(t) > 0$ pour $t \in]\alpha, \pi[$.

Ainsi g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et comme $g(0) = 2$, $g(\pi/3) = 0$ et $g(\pi/2) = -1$, $g(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \pi/3[$ et $g(t) < 0$ pour tout $t \in]\pi/3, \pi]$.

2 On peut réduire l'étude de M à $[0, \pi]$ car x et y sont 2π -périodiques et donc on prend $t \in [-\pi, \pi]$ puis comme x est paire et y est impaire, on se ramène bien à $t \in [0, \pi]$ et on effectuera ensuite la symétrie orthogonale par rapport à Ox .

3 Trouvons les variations de x et de y .

On a $x'(t) = -\sin t(2\cos t + 1)$ et donc x' s'annule pour $t = 0, 2\pi/3$ et π . Et donc $x' < 0$ pour $t \in 0, 2\pi/3[$ et $g'(t) > 0$ pour $t \in]2\pi/3, \pi]$.

Quant à $y'(t)$, on reconnaît $g(t)$.

En conclusion, x décroît sur $[0, 2\pi/3]$ et croît sur $[2\pi/3, \pi]$ avec $x(0) = 2, x(\pi/3) = 3/4, x(\pi/2) = 0, x(2\pi/3) = -1/4$ et $x(\pi) = 0$.

Et y croît sur $[0, \pi/3]$ et décroît sur $[\pi/3, \pi]$ avec $y(0) = 0, y(\pi/3) = 3\sqrt{3}/4 \sim 1.3, y(\pi/2) = 1, y(2\pi/3) = \sqrt{3}/4 \sim 0.43$ et $y(\pi) = 0$.

4 Calculons $M'(\pi), M''(\pi)$ et $M^{(3)}(\pi)$.

$$x''(t) = -2\cos(2t) - \cos t, x^{(3)}(t) = 4\sin(2t) + \sin t, y''(t) = -2\sin(2t) - \sin t, y^{(3)}(t) = -4\cos(2t) - \cos t.$$

On a : $M'(\pi) = (0, 0), M''(\pi) = (-1, 0)$ et $M^{(3)}(\pi) = (0, -3)$. Le point $M(\pi)$ est donc un point de rebroussement de première espèce et la tangente en $M(\pi)$ est portée par $\vec{i}$.

5 Exprimons la longueur de M .

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (-\sin(2t) - \sin t)^2 + (\cos(2t) + \cos t)^2 = 2 + 2\cos t = 4\cos^2 \frac{t}{2}.$$

$$\text{Et } l = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2 \int_0^{\pi} 2\cos \frac{t}{2} dt = 8.$$

6 Il reste à tracer enfin M . A faire par le lecteur. Il reconnaitra une cardioïde.

Planche 34. CCS 2019

1. La fonction $t \mapsto t^n(\ln t)^2$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$. Le seul problème éventuel est en 0. On écrit avec le changement de variable $t = 1/x$:

$$I_n = \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt = - \int_{+\infty}^1 \frac{1}{x^n} (\ln x)^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{n+2}} dx.$$

Puis $x^{\frac{3}{2}} \times \frac{(\ln x)^2}{x^{n+2}} = \frac{(\ln x)^2}{x^{n+\frac{1}{2}}}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Et donc $\frac{(\ln x)^2}{x^{n+2}} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$, intégrale convergente.

Pour le calcul, on fait une première intégration par parties.

$$I_n = \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt = - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{2 \ln t}{t} dt + \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln t)^2 \right]_0^1 = - \frac{2}{n+1} \int_0^1 t^n \ln t dt.$$

Puis une seconde intégration par parties.

$$I_n = \frac{2}{(n+1)^2} \int_0^1 t^n dt - \frac{2}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \ln t \right]_0^1 = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

2. Encore une fois le seul problème est en $+\infty$. Posons $f(t) = \frac{t^{\ln t}}{(\ln t)^t}$, fonction continue sur $[2, +\infty[$.

$$f(t) = e^{(\ln t)^2 - t \ln(\ln t)} \Rightarrow t^2 f(t) = e^{2 \ln t + (\ln t)^2 - t \ln(\ln t)}.$$

On fait le changement de variable $x = \ln t$ et $f(t) = e^{2x+x^2-e^x \ln x}$. On remarque que $2x + x^2 - e^x \ln x \sim -e^x \ln x$ quand $x \rightarrow +\infty$ et donc $t^2 f(t)$ tend vers 0 et donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, intégrale convergente.

3. Comme $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} > 0$, on applique d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = (n+1)^2 e^{(-2n-1) \ln 2}.$$

Cette quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ converge.

Planche 35. CCS 2019

1. Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$.

On a immédiatement $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$. Et ϕ est symétrique.

Puis $\phi(P, aQ + R) = a\phi(P, Q) + \phi(P, R)$. Et ϕ est linéaire par rapport à la seconde variable.

Puis $\phi(P, P) = \int_0^1 P(x)^2 dx \geq 0$ et si $\phi(P, P) = 0$ alors comme $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue, et comme son intégrale sur $[0, 1]$ est nulle, P est nulle sur $[0, 1]$ donc sur $\mathbb{R}$ (car a une infinité de racines). En conclusion, ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminons $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Il s'agit de $\|p_F(x^2) - x^2\|^2$, où F est $\mathbb{R}_1[X]$ et $p_F(x^2)$ est la projection orthogonale de x^2 sur F .

• Commençons par trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

On pose $V_1 = 1$ et $V_2 = x + \lambda$.

Comme $\phi(V_1, V_2) = \int_0^1 (x + \lambda) dx = 0$, on a : $\frac{1}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

On a par ailleurs $\|V_1\|^2 = 1$ et $\|V_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$ alors $\|V_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est $W_1 = 1$ et $W_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

• Déterminons $p_F(x^2) = \phi(x^2, W_1)W_1 + \phi(x^2, W_2)W_2$.

On a $\phi(x^2, W_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ et $\phi(x^2, W_2) = \int_0^1 2\sqrt{3}x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{2\sqrt{3}}{12}$.

Ainsi $p_F(x^2) = \frac{1}{3}W_1 + \frac{2\sqrt{3}}{12}W_2 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{12}2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x - \frac{1}{6}$.

• Il reste le calcul de $\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$. La quantité $\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2$ vaut

$$x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}.$$

Ainsi $\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + \frac{x}{36}\right]_0^1 = \frac{1}{180}$ après calculs.

Planche 36. CCS 2023

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1. Allure de f . On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ et donc f est continue en 0.

De plus, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ pour $x > 0$ et f est croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-X) = 0$ et la courbe a une tangente horizontale en O .

2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est la composée de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et de $\exp$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}$.

3. On remarque que $P_0 = 1$ et que $P_1 = X^2$. Supposons le résultat vrai à l'ordre N .

$$f^{(N+1)}(x) = \left(P_N \left(\frac{1}{x}\right) f(x)\right)' = -\frac{1}{x^2} P_N' \left(\frac{1}{x}\right) f(x) + P_N \left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Ce qui donne $f^{(N+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P'_N\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}P_N\left(\frac{1}{x}\right)\right)f(x)$.

Ainsi $P_{N+1} = -X^2P'_N + X^2P_N$.

4. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Il suffit de vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0. Comme f est la fonction nulle pour $x < 0$, il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(N)}(x) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(N)}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_N(t) \exp(-t) = 0$$

car l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances en l'infini.

Planche 37. CCINP 2023

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + \frac{1}{1+e^x}$.

f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$f_n''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$$

et donc $f_n''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$.

La fonction f_n' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f_n'(0) = n - \frac{1}{4} > 0$, f_n' est à valeurs positives et donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, on complète le tableau de variations.

2. L'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution x_n sur $\mathbb{R}$ d'après le T.V.I car f_n est continue, strictement monotone et change de signe. Comme de plus $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$, $x_n < 0$.

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -n\frac{1}{n} + \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} = -1 + \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$$

Donc $-\frac{1}{n} < x_n < 0$ et on en déduit la convergence de la suite (x_n) vers 0.

Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ revient à montrer que $-2nx_n$ tend vers 1.

$$nx_n + \frac{1}{1+e^{x_n}} = 0 \Rightarrow -2nx_n = \frac{2}{1+e^{x_n}},$$

quantité qui tend bien vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Enfin comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge et comme $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, la série $\sum x_n$ diverge.

Planche 38. CCINP 2021

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les surfaces

$$S_1 : x^2 + 2z^2 - 1 = 0 \text{ et } S_2 : y^2 + 3z^2 - 1 = 0.$$

1. Montrons que $A_1(1, 1, 0)$ et $A_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ appartiennent aux surfaces.

Clairement $1 - 1 = 0$ et $A_1 \in S_1$, $1/3 + 2/3 - 1 = 0$ et $A_2 \in S_1$, $1 - 1 = 0$ et $A_1 \in S_2$ et enfin $3/3 - 1 = 0$ et $A_2 \in S_2$.

On définit f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par : $f_1(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 1$ et $f_2(x, y, z) = y^2 + 3z^2 - 1$.

2. f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ car ce sont des fonctions polynomiales.

3. Calculons le gradient de f_1 et de f_2 en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

$$\nabla f_1(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) = (2x_0, 0, 4z_0).$$

$$\nabla f_2(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = (0, 2y_0, 6z_0).$$

4. Déterminons les points réguliers de S_1 . Ce sont les points qui n'annulent pas ∇f_1 . Seuls les points de l'axe $O\vec{j}$ ne sont pas réguliers et comme $O\vec{j} \cap S_1 = \emptyset$, tous les points de S_1 sont réguliers.

Remarque : De même, tous les points de S_2 sont réguliers.

5. Déterminons les équations des plans tangents à S_1 et à S_2 en A_1 .

On rappelle que le plan tangent à $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à S_1 a pour équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

On trouvera $(x - 1) \times 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. De même, $y = 1$ est une équation du plan tangent en A_1 à S_2 .

Planche 39. CCS 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On montre rapidement que le polynôme caractéristique $\chi_A(t) = (t + 1)^3$. Si A est diagonalisable alors A est semblable à $-I_3$ donc vaut $-I_3$ et c'est absurde. Enfin, comme $\chi_A(t)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. Montrons que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On commence par résoudre $AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 0 & a & d \\ 1 & b & e \\ -1 & c & f \end{pmatrix}$ et on a $T = P^{-1}AP$ ou encore $PT = AP$.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & d \\ 1 & b & e \\ -1 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & d \\ 1 & b & e \\ -1 & c & f \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -a & a - d \\ -1 & 1 - b & b - e \\ 1 & -1 - c & c - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a + 2b + 2c & -d + 2e + 2f \\ -1 & a - b & d - e \\ 1 & -a - c & -d - f \end{pmatrix}.$$

Alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & d \\ 1 & d & e \\ -1 & -d & \frac{1}{2} - e \end{pmatrix}$ et on peut choisir $d = e = 0$. Et donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Calculons les puissances de A . On a : $A^n = P^{-1}T^nP$. Un calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Puis $T = -I_3 + C$ et comme $C^3 = 0$, C est nilpotente d'ordre 3.

$$T^n = (C - I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} C^k (-I_3)^{n-k}.$$

Finalement, $T^n = (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} C + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^n C^2$. Le lecteur terminera le calcul.

Planche 40

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Nature de l'endomorphisme ϕ canoniquement associé à A .

Si C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de A , (C_1, C_2, C_3) est orthonormé et donc A est la matrice d'une isométrie. Puis $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et donc A est la matrice d'une rotation. Puis $AX = X$ donne $(1, 1, -3)$ pour vecteur dirigeant l'axe. Puis $1 + 2 \cos \theta = \text{Tr}(A)$ donne $\theta = \pm \arccos(-5/6)$. Puis $\text{Det}(\vec{n}, \vec{u}, \phi(\vec{u}))$ avec $\vec{u} = (1, -1, 0)$ est positif et on prend $\theta = \arccos(-5/6)$.

Planche 41. CCINP 2019

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^n$ avec k entier fixé de $\mathbb{N}$.

Comme $u_n = \binom{n}{k} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^n > 0$, on va tenter la règle de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{n+1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^n} = \frac{n+1}{n+1-k} \times \frac{k+1}{k+2},$$

et cette dernière quantité tend vers $\frac{k+1}{k+2} \in]0, 1[$ et donc notre série converge.

Planche 42. CCINP 2019

1. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = f(M) + \lambda f(N).$$

Et de plus $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

On obtient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ et $\text{Det}(f) = (\text{Det}(A))^2$ après calcul.

Enfin f est un automorphisme si et seulement si $\text{Det}(f) \neq 0$ et donc si et seulement si $\text{Det}(A) \neq 0$ et donc si et seulement si A est inversible.

Planche 43. CCINP 2019

On remarque pour commencer que $f : t \mapsto \arctan\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$ est définie pour $t \neq \pm 1$. On prend $t \in]-1, 1[$ car le but est d'avoir un D.S.E donc sur un intervalle centré en 0. Impossible de calculer le D.S.E directement car ce serait infernal. On commence par dériver f et on fera le D.S.E de f' puis on l'intégrera.

Ici $f(t) = \arctan(u(t))$ avec $u(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. Après calculs, $u'(t) = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$ et $f'(t) = \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}$. On

obtient : $f'(t) = \frac{2t}{1+t^4}$ après simplification. Il reste à faire le D.S.E sur $] -1, 1[$.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n t^{4n+1} \Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t^{4n+2}}{4n+2} + K, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

Comme $f(0) = \arctan 1 = \pi/4$, on a $K = \pi$.

Planche 44. CCINP 2025

1. Pour commencer $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \cdot (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = (X_i X_j)$, avec i et j variant de 1 à n .

Chaque colonne C_j de M est $\begin{pmatrix} X_1 X_j \\ X_2 X_j \\ \vdots \\ X_n X_j \end{pmatrix} = X_j X$.

Donc toutes les colonnes sont dans la droite vectorielle de base X et $Rg(M) \leq 1$. Ainsi la loi de R est une loi de Bernoulli.

$$P(R=0) = P(X=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i=0)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i=0) = q^n.$$

Alors $P(R=1) = 1 - q^n$ et R suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1 - q^n)$.

2. On a $Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Puis pour tout i , $P(X_i^2=1) \Leftrightarrow P(X_i=1)$.

Ainsi X_i^2 suit une loi de Bernoulli et comme $P(X_i^2=1) = p$, $X_i^2 \sim \mathcal{B}(p)$.

Les v.a.r X_i^2 sont indépendantes par le lemme des coalitions. Ainsi, $Tr(M) \sim \mathcal{B}(n, p)$.

3. M est une projection si et seulement si $M^2 = M$. Puis $M^2 = X X^T X X^T = X (X^T X) X^T$.

$$\text{Or } X^T X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = X_1^2 + \dots + X_n^2.$$

Ainsi : $M^2 = (X_1^2 + \dots + X_n^2) X X^T = (X_1^2 + \dots + X_n^2) M$. Et M est une projection si et seulement si $X_1^2 + \dots + X_n^2 = 1$.

Cela donne que pour tout i fixé entre 1 et n , $X_i = 1$ et $X_j = 0$ pour tout $j \neq i$.

$$P(M \text{ projection}) = \sum_{i=1}^n p q^{n-1} = n p q^{n-1}.$$

Planche 45. CCS 2025

1. Pour tout P, Q, R polynômes, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ donc symétrie

Puis $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle$ donc linéarité.

Puis $\langle P, P \rangle$ est positif malgré son âge ! (Je sais je la fait tout le temps)

Enfin si $\langle P, P \rangle$ est nul (à cause d'Alzeihmer), c'est surtout qu'alors tous les a_k sont nuls et donc $P = 0$.

2. On a : $F_1^\perp = \{Z \in \mathbb{R}[X], \langle Z, 1 - X \rangle = 0\}$. En prenant $Z = \sum \alpha_k X^k$, $\langle Z, 1 - X \rangle = \alpha_0 - \alpha_1 = 0$.

Et donc $Z = \alpha_0(1 + X) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k X^k$.

Par ailleurs soit $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ quelconque. Trouvons α et β réels tels que

$$P = a_0 + a_1 X + \sum_{k=2}^{\infty} a_k X^k = \alpha(1 - X) + \beta(1 + X) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k X^k.$$

Il suffit que $a_0 = \alpha + \beta$ et $a_1 = -\alpha + \beta$. Alors $\alpha = \frac{1}{2}(a_0 - a_1)$ et $\beta = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$.

Ainsi tout polynôme P est bien somme d'un polynôme de F_1 et de $F_1^\perp$.

Comme F_1 et $F_1^\perp$ ont nécessairement une intersection nulle, $\mathbb{R}[X] = F_1 \oplus F_1^\perp$.

3. F_2 a pour base $\{1 - X, (1 - X)X, \dots, (1 - X)X^n, \dots\}$. Prenons $P = \sum_k a_k X^k \in F_2^\perp$.

On a : $\langle P, 1 - X \rangle = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 = 0$, $\langle P, X - X^2 \rangle = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0$, ..., $\langle P, X^n - X^{n+1} \rangle = 0 \Rightarrow a_n - a_{n+1} = 0$, etc

Alors $F_2^\perp$ est constitué de polynômes à coefficients égaux. Mais comme de plus si $p = \deg(P)$, $a_{p+1} = 0$ et comme $a_p = a_{p+1}$ alors $a_p = 0$ ce qui est absurde. Donc seul le polynôme nul est dans $F_2^\perp$.

L'égalité $F_2 \oplus F_2^\perp = \mathbb{R}[X]$ est fausse car sinon $F_2 = \mathbb{R}[X]$ ce qui n'est pas le cas.

Remarque : En conclusion $F \oplus F^\perp = E$ n'est pas toujours vraie si E est de dimension infinie.

Planche 46. CCS 2025

1. On fait une récurrence. On a $u_0 \geq 2$.

Supposons $u_n \geq 2$, $u_{n+1} = 2 + \frac{2}{u_n} \geq 2$. (En fait il faut aussi montrer par récurrence que $u_n > 0$ mais c'est le même process.)

2. Rapidement $g'(x) = -\frac{2}{x^2} - 1 < 0$ et g est strictement décroissante.

3. $g(x)$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Comme g est strictement décroissante et continue sur $]0, +\infty[$, et change de signe, d'après le T.V.I, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(\alpha) = 0$ ou encore $f(\alpha) = \alpha$.

5. Comme $f'(x) = -2/x^2$, $|f'(x)| \leq 1/2$.

On utilise l'inégalité des AF.

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \max_{x \in [2, +\infty[} |f'(x)| |u_n - \alpha| \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

Remarque : La question qui manque c'est trouver la limite de (u_n) .

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Planche 47. CCINP 2024

1. Définition puis dérivée de arctan : vous savez tous que arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.

Puis $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ et écrivons le D.S.E de arctan.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \Rightarrow \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et le rayon de convergence est $R = 1$.

2-a Calculons $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan(x) dx$. On applique la méthode belge.

$$I = - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x}{1+x} dx + [x \arctan(x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Ce qui donne $I = \left[-\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + x \arctan(x) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Et finalement, $I = -\frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{4}{3} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$.

2-b On part de $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{2n+1} dx = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)(k+1)}$.

2-c Partons de $J = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{dx}{x^2} \right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) dx$.

Or $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$ et donc $J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) dx$.

Et on obtient $J = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - I$.

Planche 48. CCINP 2024

Réolvons $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ en posant $z = y'' - y$.

On a : $z'' = y^{(4)} - y''$.

$$y^{(4)} - y^{(2)} - (y^{(2)} - y) = 0 \Rightarrow z'' - z = 0.$$

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On écrit $y''(x) - y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

On commence par l'équation homogène associée, on a : $y_H(x) = \epsilon e^x + \eta e^{-x}$.

Puis on cherche une solution particulière de $y_{p_1}''(x) - y_{p_1}(x) = \lambda e^x$. On cherche une solution de la forme

$$y_{p_1}(x) = a x e^x. \text{ En identifiant, on trouve } a = \frac{1}{2} \lambda. \text{ Et ainsi } y_{p_1}(x) = \frac{\lambda}{2} x e^x.$$

Puis on cherche une solution particulière de $y_{p_2}''(x) - y_{p_2}(x) = \mu e^{-x}$. On cherche une solution de la forme

$$y_{p_2}(x) = b x e^{-x}. \text{ En identifiant, on trouve } b = -\frac{1}{2} \mu. \text{ Et ainsi } y_{p_2}(x) = -\frac{\mu}{2} x e^{-x}.$$

Il reste à tout regrouper.

$$\exists(\epsilon, \eta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \epsilon e^x + \eta e^{-x} + \frac{\lambda}{2} x e^x - \frac{\mu}{2} x e^{-x}.$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

Planche 49. CCS 2024

1. Un petit programme Python.

```
In [1]: import numpy as np
In [2]: def Planche49(n):
...:     a=0
...:     for k in range(1,n+1):
...:         a = a + np.arctan(k/(n**2))
...:     return a
...:
In [3]: [Planche49(n) for n in range(1,10)]
Out[3]:
[0.7853981633974483,
 0.7086262721276703,
 0.6510767214444797,
 0.6171004176652777,
 0.595288420890148,
 0.580222295973621,
 0.5692275638967339,
 0.5608634514894312,
 0.5542923043862308]
In [4]: Planche49(100)
Out[4]: 0.5049914995100647
```

Celui qui a un peu d'odorat sent qu'on tend vers $1/2$, celui qui a le nez bouché, je ne peux rien pour lui.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, on pousse jusqu'à $f^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^4}$.

La dérivée tierce s'annule pour $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Elle est positive sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ et sur $]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. Elle est négative sur $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Ainsi f'' est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ et sur $]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. Elle est décroissante sur $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Comme $f''(0) = 0$ et comme f'' tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, on peut en conclure que $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-9}{8\sqrt{3}}$ est le minimum et $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{8\sqrt{3}}$ est le maximum. Ainsi $M_2 = \frac{9}{8\sqrt{3}}$.

3. On applique le T.A.F à f' , on a : $|f'(t) - f'(0)| \leq |t| \max_{x \in [0, t]} |f''(x)|$.

Cela donne pour tout $t \geq 0$, $|f'(t) - 1| \leq M_2 t$.

4. Partons pour un $x > 0$ fixé, $-xM_2 \leq f'(x) - 1 \leq xM_2$.

$$\int_0^t -xM_2 dx \leq \int_0^t (f'(x) - 1) dx \leq \int_0^t xM_2 dx \Rightarrow -\frac{t^2}{2}M_2 \leq f(t) - t \leq \frac{t^2}{2}M_2.$$

Cela donne $-\frac{k^2}{2n^4}M_2 \leq \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \leq \frac{k^2}{2n^4}M_2$. Il reste à sommer k de 1 à n .

$$-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}M_2 \leq u_n - \frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}M_2.$$

Ce qui donne : $-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}M_2 \leq u_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}M_2$.

Ou encore : $-\frac{1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}M_2 \leq \frac{1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}M_2 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}M_2 + \frac{1}{2n}$.

On a bien : pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)M_2}{12n^3}$. Et en particulier u_n tend vers $\frac{1}{2}$.

Planche 50. CCINP 2024

1. Posons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On sait que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

$$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^2 - j - 1 = 0.$$

2. Comme $j^2 = \bar{j}$, j^2 est aussi une racine de P .

Puis $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$ et on a $P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 0$. Ainsi, j est aussi racine de P' et par voie de conséquence j^2 est aussi racine de P' . Il reste à passer à P'' et on voit que j n'est pas racine de ce polynôme (le faire). On s'arrête là pour j et j^2 et on peut déjà conclure que $(X^2 + X + 1)^2$ divise P . Puis $P(0) = 0$ et X divise P . Enfin, la formule du binôme appliquée à P montre que le terme en X^7 s'élimine et donc le de gré de P est 6 avec pour monôme de plus haut degré $7X^6$.

Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = 7X(X^2 + X + 1)^2(X + a)$. Comme $P = \sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^6 \binom{7}{k} X^k$, le

terme de plus bas degré de P est $7X$. Donc $a = 1$.

Bilan : les racines de P sont -1 , 0 , j (double) et j^2 (double).

Planche 51. CCS 2024

1. On part d'une solution y développable en série entière sur $] -R, R[$ avec R à déterminer.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

La quantité $x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x)$ devient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ou encore :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ou encore

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n - n(n+1)a_{n+1} + (3n+1)a_n) x^n - 2a_2 x + 3a_1 x + a_1 x + a_0.$$

On applique alors l'unicité du D.S.E .

$$a_0 = 0, 2a_2 = 4a_1 \text{ et } \forall n \geq 2, (n(n-1) + 3n+1)a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$$

On a donc : $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ pour tout $n \geq 2$ et $a_2 = 2a_1$.

$$a_n = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n-2} \times \dots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1 = na_1.$$

$$\text{Il reste } y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_1 x^n = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}.$$

2. Le rayon de convergence est clairement 1.

Planche 52. CCINP 2019

1. On pose $f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1-t} dt$.

1) La fonction $h_x = t \mapsto t^{-x} \sqrt{1-t}$ est pour tout x fixé continue sur $]0, 1]$. De plus $h_x(t) \sim \frac{1}{t^x}$ quand t tend vers 0. Donc h_x est intégrable pour $x < 1$ et f est définie sur $] -\infty, 1[$.

$$\text{Enfin, } f(0) = \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \left[-\frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Déterminons le sens de variation de f .

$$x < y \Rightarrow -x > -y \Rightarrow -x \ln(t) < -y \ln(t) \Rightarrow e^{-x \ln(t)} < e^{-y \ln(t)} \Rightarrow t^{-x} < t^{-y}.$$

On en déduit donc que $f(x) < f(y)$ et que f est strictement croissante.

3) On a : $0 \leq \sqrt{1-t} \leq \sqrt{2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

$$\text{Donc } \forall x \in] -\infty, 1[, 0 \leq f(x) \leq \sqrt{2} \int_0^1 t^{-x} dt.$$

$$\text{Ce qui donne : } 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{1-x}.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 0.

Quand x tend vers 1, $f(1)$ a pour intégrande $\sqrt{1-t}/t$ qui est équivalent à $1/t$ quand t tend vers 0 et donc $f(1)$ est infinie.

Planche 53. CCS 2019

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\pi \ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} dx$

1. Montrons l'existence de I_n et de J_n : $\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cos(nx) \sim \ln(x)$ quand $x \mapsto 0^+$. Comme $\ln(x)$ est intégrable sur $[0, \pi]$, I_n existe.

Puis $\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \sim \frac{nx}{\frac{x}{2}} = 2n$ quand $x \mapsto 0^+$. Et J_n existe.

$$2., \text{ On a : } I_n = - \int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} dx + \left[\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi.$$

On en déduit que $I_n = -\frac{1}{2n} J_n$

Calculons $J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} (\sin((n+1)x) - \sin(nx)) dx$

On rappelle que $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et donc : $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

$$\sin((n+1)x) - \sin(nx) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

Il reste $J_{n+1} - J_n = 2 \int_0^\pi \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx = 2 \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx$.

Puis encore une formule trigo termine le travail.

$$J_{n+1} - J_n = 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{(2n+2)x}{2}\right) + \cos\left(\frac{2nx}{2}\right) \right) = \left[\frac{\sin((n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi = 0.$$

Comme on a divisé par n , on a donc $J_{n+1} = J_n$ que pour $n \geq 1$.

Il reste $J_0 = 0$ et $J_1 - J_0 = \pi$ et donc $J_1 = \pi$. La suite (J_n) est une suite arithmétique et pour tout $n \geq 1$, $J_n = n\pi$. On peut étendre à $J_0 = 0$.

Et $I_n = -\frac{1}{2n} n\pi = -\frac{\pi}{2}$.

Planche 54. CCINP 2024

1. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, $Y(\Omega) = \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et $Z(\Omega) = \llbracket 3, n \rrbracket$. Le nombre de tirages est $\binom{n}{3}$.

Tous les tirages sont équiprobables et $P(X = j, Y = k, Z = l) = \frac{1}{\binom{n}{3}}$ pour $1 \leq j < k < l \leq n$.

$$\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, P(Y = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=k+1}^n P(X = j, Y = k, Z = l) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}.$$

Remarque : On peut vérifier $\sum_{k=2}^{n-1} P(Y = k) = 1$.

2. On a $E(Y) = \sum_{k=2}^{n-1} k P(Y = k) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{k=2}^{n-1} (k^2 - k)(n-k)$.

On développe : $E(Y) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{k=2}^{n-1} (nk^2 - k^3 - nk + k^2)$.

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Un calcul fou donne $E(Y) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \left(n(n-1) \left(\frac{(n+1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n}{2} \right) \right)$.

Ou encore $E(Y) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{n(n-1)}{12} ((2n+2)(2n-1) - 3n(n-1) - 6n) \right)$ et donc :

$$E(Y) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \frac{n(n-1)}{12} (n-2)(n+1) = \frac{n+1}{2}.$$

Planche 55. CCINP 2023

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ qui est paire et F la primitive de f telle que $F(0) = 0$.

La limite de F en $+\infty$ est finie car $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. F est impaire car f est paire.

Comme $F'(x) = e^{-x^2} > 0$, F est strictement croissante.

Pour l'allure de F , c'est à vous.

3. On pose dans la suite $G(x) = \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt$. On pose $u = xt$.

$G(x) = \int_0^1 e^{-u^2} \frac{1}{x} du = \frac{F(x)}{x}$, et cela pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4. On a : $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = 1$.

Supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

5. Pour $x \neq 0$, $G'(x) = -\frac{F(x)}{x^2} + \frac{F'(x)}{x} = -\frac{F(x)}{x^2} + \frac{e^{-x^2}}{x}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{F(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x)}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$.

On a : $e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ et $F(x) = F(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{x} \right) = 0$.

7. Pour $x > 0$, $G'(x) = \frac{1}{x} \left(e^{-x^2} - \frac{F(x)}{x} \right)$.

On a $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq x \cdot e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$. Et donc $\frac{F(x)}{x} \geq e^{-x^2}$.

On en déduit que $G'(x) < 0$ pour $x > 0$ et G est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x G'(x) = \frac{F(x)}{x} + e^{-x^2} = -G(x) + f(x)$. On a bien ce qu'on veut.