

Devoir libre n°02

2TSI. Mathématiques

A rendre le jeudi 05 octobre 2017 au plus tard

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être faits dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

On définit $f_0 : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, puis pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-x}x^n$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$L_n : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x).$$

(On rappelle que $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f_n et que par convention, $f_0^{(0)} = f_0$.)

1. Déterminer L_0 , L_1 et L_2 .
2. Montrer, en utilisant la **formule de Leibniz**, que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x).$$

3. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

4. Ici, on va déterminer l'expression de L_n .

(a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n) = \frac{n!x^k}{k!}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} = (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$, de deux manières :

- i. en utilisant une méthode directe par récurrence et la question précédente.
- ii. en utilisant la formule de Leibniz.

5. On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = L_n(x).$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^n \left[\left(\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} \right) \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!} \right] + \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

(b) Conclure.

T.S.V.P →

Exercice 02

Extrait de l'écrit des Concours Arts et Metiers ParisTech-ESTP-POLYTECH (banque E3A) pour la filière MP en 2017

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n . On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

1. Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.

On note dans la suite ϕ_n cet endomorphisme.

2. Expliciter la matrice de ϕ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
 - (i) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$.
 - (ii) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \dots + \delta^n) = Id.$$

6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 03

Extrait de problème posé à l'écrit des concours Arts et Metiers Paris Tech-ESTP-Polytech, banque E3A, filière PC en 2017

Dans certaines questions de cet exercice, on écrira des programmes en langage Python.

1. Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.
 - (a) Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.
 - (b) Écrire en Python une fonction `Python_rech_dicho` prenant en arguments une fonction f , deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f à une précision `eps` près.
2. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
 - (a) Montrer que f a un point fixe, c'est-à-dire une valeur $c \in [0, 1]$ telle que $f(c) = c$.
 - (b) Écrire en Python une procédure `rech_pt_fixe` qui prend en arguments une fonction f que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de f à une précision `eps` près. On pourra utiliser `rech_dicho`.