

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 01

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.
On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A Étude de l'endomorphisme associé à A

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est évidemment A .

2. Calculons le rang de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On part de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et par exemple les opérations élémentaires successives :

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3, L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

donne : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de rang 3.

Alors les trois colonnes sont une base de $\text{Im } f$ et donc f est surjectif.

3. • Déterminons le noyau de l'endomorphisme f .

On peut résoudre le système $AX = 0$ mais c'est idiot. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \text{Rg } f = 3 \Rightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \Rightarrow \text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}.$$

Ainsi f est injectif. Et donc f est bijectif.

4-a On pose $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ et les vecteurs $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$.

On va montrer que F est un Vect et on démontre ainsi directement que F est un sous-espace et on aura sa dimension.

$$(x, y, z) \in F \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = x \\ -x - y - z = y \\ x + 2y + 2z = z \end{cases} \Rightarrow x + 2y + z = 0.$$

Et donc :

$$(x, y, z) \in F \Rightarrow (x, y, z) = (x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2).$$

Donc $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -2))$. Et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 car $((1, 0, -1), (0, 1, -2))$ est clairement une famille libre.

4-b Les vecteurs e'_1 et e'_2 sont dans F car leurs composantes vérifient $x + 2y + z = 0$. Comme cette famille (e'_1, e'_2) est libre, et comme $\dim F = 2$, elle forme une base de l'espace vectoriel F .

5-a $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On montre rapidement qu'elle est de rang 3.

5-b Écrivons $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e_1)$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}'$.

Déjà, $f(e'_1) = e'_1$ et $f(e'_2) = e'_2$ car ces deux vecteurs sont dans F .

Puis $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 = e'_2 + e_1$ car $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$.

Alors la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5-c La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Son inverse peut se déterminer par Gauss-Jordan ou en inversant $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X = X'$, on trouvera :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retrouvons l'expression de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en utilisant ces matrices de passage. Après calculs :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - I = 2A - I.$

2. On écrit :

$$A^2 = 2A - I \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A.$$

3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrons que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On écrit :

$$\alpha I + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & -\beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\alpha' I + \beta' A = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & -\beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & 2\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' - \beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & \alpha' + 2\beta' \end{pmatrix}.$$

Il reste à écrire : $\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 2\beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta & -\beta \\ \beta & 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + 2\beta' & 2\beta' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' - \beta' & -\beta' \\ \beta' & 2\beta' & \alpha' + 2\beta' \end{pmatrix}.$

On a bien $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$ en assimilant les coefficients des deux matrices correspondants.

On définit now la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A.$$

4. Montrons (par récurrence) que pour tout entier naturel n , il existe un unique couple (α_n, β_n) de

$$\text{réels tel que } X_n = \alpha_n I + \beta_n A \text{ avec : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}.$$

Initialisation. On a : $X_0 = \alpha_0 I + \beta_0 A = 0 \times I + 1 \times A$. On pose $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.

Transmission. On suppose vrai à un rang $n \geq 0$. On écrit :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A = \frac{(\alpha_n I + \beta_n A)^2}{n+1} + 2I - A \\ &= \frac{\alpha_n^2 I + \beta_n^2 A^2 + 2\alpha_n \beta_n A}{n+1} + 2I - A. \end{aligned}$$

Puis on use de $A^2 = 2A - I$. On a :

$$X_{n+1} = \frac{\alpha_n^2}{n+1} I + 2 \frac{\beta_n^2}{n+1} A - \frac{\beta_n^2}{n+1} I + 2 \frac{\alpha_n \beta_n}{n+1} A + 2I - A.$$

On arrange.

$$X_{n+1} = \left(\frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \right) I + \left(\frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \right) A.$$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases} \text{ et le tour est joué.}$$

5. Déterminons $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3 par la formule précédente.

On trouve $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$ en partant de $n = 0$ et $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$.

Puis on trouve $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$ en partant de $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$ et $n = 1$.

Enfin, on trouve $\alpha_3 = 3$ et $\beta_3 = 1$ en partant de $n = 2$ et $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$.

6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturons une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = n \text{ et } \beta_n = 1.$$

Puis on montre tout ça.

Initialisation. clair pour $n = 0$ (et jusqu'à $n = 3$).

Transmission. On a :

$$\alpha_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{n+1} + 2 = n - 1 + 2 = n + 1 \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - 1 = 1.$$

$$\text{Alors l'expression de } X_n, \text{ en fonction de } n \text{ est : } X_n = nI + A = \begin{pmatrix} n+2 & 2 & 1 \\ -1 & -1+n & -1 \\ 1 & 2 & 2+n \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 02

1-a Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

Alors $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$ et on pose $P_0 = X$. Et $A(0)$ est vraie.

Puis pour $x \in I$, $f'(x)$ vaut :

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)} \times \left(\frac{1}{1-x} \right)' e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est bien $A(1)$ en posant $P_1 = X^2 + X^3$.

1-b On suppose que $A(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné, montrons alors $A(n+1)$ est vraie.

Partons de pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$. Alors $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ vaut :

$$P'_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \times \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^2} \times P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

C'est-à-dire :

$$\left(P'_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \right) \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} = P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Il suffit de poser :

$$P_{n+1} = X^2(P'_n + P_n).$$

1-c On remarque que $\deg P_0 = 1$ et $\deg P_1 = 3$. Si $\deg P_n = u_n$, alors $\deg P'_n = u_n - 1$ et $\deg P_{n+1} = \deg(X^2 P_n)$ et donc : $\deg P_{n+1} = u_{n+1} = 2 + u_n$. C'est une suite arithmétique de raison 2.

On trouve finalement :

$$\deg P_n = 1 + 2n.$$

1-d On a $P_2 = X^2(P'_1 + P_1) = X^2(3X^2 + 2X + X^3 + X^2) = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.

On a : $P_3 = X^2(P'_2 + P_2) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$. (Après de terribles calculs).

1-e $P_1 = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Puis :

$$P_2 = X^3(X^2 + 4X + 2) = X^3(X + 2 - \sqrt{2})(X + 2 + \sqrt{2})$$

dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

2-a f vérifie la relation : (1) $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$, pour tout $x \in I$.

En effet,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)}e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{2-x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = (2-x)f(x).$$

2-b Gottfried Leibniz dit que si u et v sont deux fonctions n fois dérivables alors uv aussi et

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Puis :

$$((2-x)f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2-x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0} (2-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)$$

Et de même,

$$((1-x)^2 f'(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((1-x)^2)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x)$$

$$= \binom{n}{0} (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} 2(1-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{2} 2f^{(n-1)}(x).$$

Mis ensemble :

$$\binom{n}{0}(2-x)f^{(n)}(x) - \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x) = \binom{n}{0}(1-x)^2f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1}2(1-x)f^{(n)}(x) + \binom{n}{2}2f^{(n-1)}(x).$$

Plus exactement :

$$(2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = (1-x)^2f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x).$$

Ou encore :

$$[(2-x) + 2n(1-x)]f^{(n)}(x) + [-n - n^2 + n]f^{(n-1)}(x) = (1-x)^2f^{(n+1)}(x).$$

Et finalement :

$$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) = [2 + 2n - (1 + 2n)x]f^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x).$$

Ainsi $a = 2 + 2n$, $b = -(1 + 2n)$ et $c = -n^2$.

Dans le cas $n = 1$,

$$(1-x)^2f''(x) = (4-3x)f'(x) - f(x).$$

Comme $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$,

$$(1-x)^2P_2\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = (4-3x)P_1\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

On commence par enlever l'exponentielle.

$$(1-x)^2P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)P_1\left(\frac{1}{1-x}\right) - P_0\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Comme $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + X^3$, on en déduit :

$$(1-x)^2P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}\right] - \frac{1}{1-x}.$$

Et donc :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = (4-3x)\left[\frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5}\right] - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

On remarque que $4-3x = 1 + 3(1-x)$. Ce qui donne :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^4} + \frac{3(1-x)}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Et comme $\frac{3(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{3}{(1-x)^3}$ et $\frac{3(1-x)}{(1-x)^5} = \frac{3}{(1-x)^4}$, on en déduit :

$$P_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{4}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On retrouve $P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$.

Remarque : le matheux fou verra que :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X).$$