

2TSI-MATHÉMATIQUES

A rendre le lundi 12 octobre 2026 au plus tard

Les différents exercices sont indépendants, de poids inégaux et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Étude de l'endomorphisme associé à A

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

- Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
- Calculer le rang de la matrice A . L'endomorphisme f est-il surjectif?
- L'endomorphisme f est-il injectif? Est-il bijectif?
- On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
- (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Calculer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B Étude d'une suite de matrices

- Montrer que $A^2 = 2A - I$.
- Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
- Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

- Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} &= \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} &= \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3 ,
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture.
En déduire l'expression de X_n , en fonction de n .

EXERCICE 02

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

1. On veut ici prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}},$$

pour tout $x \in I$. On note $A(n)$ cette assertion.

- (a) Montrer que $A(0)$ et $A(1)$ sont vraies et expliciter $P_0(X)$ et $P_1(X)$.
 - (b) Montrer alors que si $A(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné, alors $A(n+1)$ est vraie.
On explicitera $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X .
 - (c) Montrer que $u_n = \deg P_n$ suit une suite arithmétique dont on donnera la raison.
En déduire $\deg P_n$.
 - (d) Expliciter $P_2(X)$ et $P_3(X)$.
 - (e) Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
2. Montrer que f vérifie la relation : (1) $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$, pour tout $x \in I$.
 3. Énoncer la formule de Gottfried Leibniz.
En dérivant n fois $(2-x)f(x)$ d'une part et $(1-x)^2 f'(x)$ d'autre part en utilisant la formule énoncée à l'instant, trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une égalité du type :

$$(E) \quad (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) = (a+bx) f^{(n)}(x) + c f^{(n-1)}(x).$$

On explicitera les valeurs des réels a, b et c .

En appliquant avec $n = 1$ cette égalité (E) et en utilisant les valeurs trouvées pour P_0 et P_1 , retrouver la valeur de P_2 .