CLASSE DE 2TSI
PROGRAMME DE COLLE DE MATHEMATIQUES

Colle 09

Du 23 Novembre 2026 au 28 Novembre 2026

Réduction des endomorphismes

▸ Notion de valeur propre et de vecteur propre. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

▸ Notion de polynôme caractéristique. On note $\chi_u(X) = \mathsf{Det}\,(X\,id - u)$, si $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. χ_u est de degré n et son coefficient dominant est 1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

▸ u est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $\sum_{\lambda \in sp(u)} \mathsf{dim}\, E_\lambda = \mathsf{dim}\, E$.

3) Trigonalisation (avec aide)

Dans le cas où le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire donc dans le cas où u est trigonalisable dans $\mathbb{K}$) et si l'on note λ_i ses racines (éléments de $\mathbb{K}$) d'ordre de multiplicité α_i, pour i variant de 1 à p, alors :

$$\mathsf{Det}\, u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i} \text{ et } \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i.$$

❑ **MÃ©thode 0.1.—** Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, définie par la donnée de u_0 et de u_1, et la relation de récurrence (R) :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$, (a, b) étant deux éléments fixés de $\mathbb{K}$.
1) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, alors la relation (R) devient $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.
2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on aboutit à $U_n = A^n U_0$.
3) On applique la méthode du calcul de la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Le colleur vérifiera la maîtrise ou l'acquisition de certains des points suivants (en question de cours ou dans un exercice)

Know-how :

Sur la réduction des endomorphismes :

1) lien entre le rang d'une matrice et la dimension de E_0.
2) Savoir calculer χ_u en mettant des termes du type $X - a$ en facteur dans le déterminant.
3) Montrer quand une matrice n'est pas diagonalisable et en particulier quand la matrice n'a qu'une valeur propre.
4) Savoir que si A en dimension n a n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable (condition suffisante de diagonalisabilité)
5) Savoir que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et les dimensions des sous-espaces propres sont aussi l'ordre de multiplicité des racines correspondantes.
6) Calculer A^n en utilisant la diagonalisation ou la trigonalisation.
7) Trigonaliser une matrice 3×3 si l'on connaît deux vecteurs propres indépendants et avec un peu d'aide.
8) Résoudre une récurrence linéaire du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ou $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ en utilisant la méthode plus haut.