$\boxed{\text{Devoir libre n°03}}$

2TSI. Mathématiques

À rendre le 09 novembre 2017 au plus tard

Les deux exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. En priorité, il faut faire l'exercice 1 (Q1), l'exercice 02 (Q1,Q2), la partie A du problème (Q1,Q2), la partie B du problème (Q1,Q2,Q4(b),Q4(c)).

Exercice 01

Soit la fonction

$$f : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ n/2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1. Programmer la fonction f en Python.
2. Écrire une procédure nommée $SYRACUSE$ qui reçoit un entier n et renvoie la suite des entiers obtenus en appliquant successivement f jusqu'à ce que l'on obtienne 1 ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à 1.
   Appliquer à la main pour $n \in [\![1, 5]\!]$. Que remarque t-on ?
   Attention, le compteur commence à 0 *et donc pour* $n = 1$, $L = [1]$ *et* $i = 0$. *Enfin, on remarquera que* 1 *est toujours le dernier élément de* L.
3. Écrire en Python les commandes nécessaires pour obtenir le graphique du nombre d'itérations en fonction de l'entier initial.
   Indications. Question 1 : on jouera de l'if, de l'elif et de l'else.
   Question 2 : on rappelle que pour créer un compteur, on tape initialement $i = 0$ *puis dans la boucle, on tape à chaque pas* $i+ = 1$ *et après la boucle (qui est du type while* $x > 1$ *:), le dernier* i *est le nombre d'itérations.*
   Question 3 : on rappelle que l'on doit importer matplotlib.pyplot. Lire la méthode 4 aussi.

Exercice 02

On pose : $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), M + M^T = \mathrm{Tr}(M)\, A\}$, où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbf{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

1. Montrer que Δ_A est un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et que $\mathcal{A}_n(\mathbf{C}) \subset \Delta_A$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{C})$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
   Puis montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{C}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{C})$.
3. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbf{C})$.
   Indication : on pourra partir de $M + M^T = \mathrm{Tr}(M)\, A$ et faire Tr de chaque côté.
4. Si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbf{C})$, déterminer Δ_A.
5. Si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{C})$, déterminer Δ_A.

Problème

Les trois parties sont indépendantes et le leitmotiv de l'ensemble est de proposer des pistes pour étudier les applications linéaires ou les endomorphismes dans $\mathbf{R}[X]$ *et dans* $\mathbf{R}_n[X]$.

Partie A

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ différent du polynôme nul et de degré p. Pour tout entier $n \geq 0$, on lui associe le polynôme $D_n(P)$ défini par : $D_n(P) = (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X) - n(n+1)P(X)$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

T.S.V.P →

1. Montrer que D_n est une application linéaire de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$.
2. Vérifier que le polynôme $D_n(P)$ est de degré inférieur ou égal p, en distinguant les trois cas $p = 0$, $p = 1$ et $p \geq 2$. (Dans ce dernier cas, on pose $P = a_p X^p + ... + a_0$ et on remplacera dans l'expression de $D_n(P)$.)
   En déduire que D_n est un endomorphisme de $\mathbf{R}_p[X]$.
3. On cherche à savoir sous quelles circonstances $D_n(P) = 0$, donc que $P \in \operatorname{Ker} D_n$.
   (a) Montrer que :
   Si $p = 0$, $D_n(P)$ est le polynôme nul si et seulement si $n = 0$.
   Si $p = 1$, $D_n(P)$ est un polynôme constant si et seulement si $n = 1$.
   Si $p \geq 2$, le degré de $D_n(P)$ est strictement inférieur à p si et seulement si $p = n$.
   En déduire que si P, différent du polynôme nul, vérifie $D_n(P) = 0$, son degré est nécessairement n.
   (b) Déterminer tous les polynômes P vérifiant $D_n(P) = 0$ dans chacun des cas particuliers $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. (On utilisera le résultat du 2)a) pour démarrer et donc par exemple dans le cas $n = 2$, partir d'un polynôme P quelconque de degré 2 et remplacer dans $D_2(P)$.)
4. Pour tout polynôme P de degré $n \geqslant 2$, expliciter les coefficients du polynôme $D_n(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ en fonction des coefficients de P.

Partie B

On considère l'application f de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$f(P)(X) = (8 + 3X)P(X) + (X^2 - 5X)P'(X) + (X^2 - X^3)P''(X).$$

L'objet de l'exercice est de trouver les sous-espaces vectoriels F de $\mathbf{R}[X]$, stables par f, vérifiant :
$\exists\, n \in \mathbf{N}$ tel que $F \subset \mathbf{R}_n[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
2. Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction de celui de P (on étudiera à part le cas $\deg P = 3$).
3. En déduire que le seul sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_p[X]$, avec $p \in \mathbf{N}$, stable par f, est $\mathbf{R}_3[X]$.
4. L'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ induit par f est noté $\hat{f}$.
   (a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbf{R}_p[X]$, non réduit à $\{0_{\mathbf{R}[X]}\}$ et stable par f, est inclus dans $\mathbf{R}_3[X]$ et stable par $\hat{f}$.
   (b) Écrire la matrice représentant l'endomorphisme $\hat{f}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
   (c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de $\hat{f}$.
   (d) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}[X]$ stables par $\hat{f}$?

Partie C

On note $E = \mathbf{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme P. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$.
2. On pose $Q_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$. Montrer que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de E.
3. On considère l'application θ de E dans $\mathbf{R}$ définie par : $\theta(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que θ est linéaire.
   (b) Montrer $\operatorname{Im} \theta = \operatorname{Ker} \varphi$.